

Práctica I CT: Repaso matemático y Micro I

Microeconomía II - Curso: Paulo Pascuini

Santiago Rodríguez Vázquez¹

Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

Marzo 2025

¹La primer versión de esta presentación fue preparada por Dante Engrassia para 2022-1C.

1. Interpretar y comparar las definiciones A1.17, A1.18, y de la A1.22 a la A1.27.

- Para nosotros $\mathbf{x}^0$ y $\mathbf{x}^1$ son canastas de bienes y f es una función de utilidad.
- $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$ quiere decir que la canasta $\mathbf{x}^0$ contiene al menos la misma cantidad de todos los bienes que $\mathbf{x}^1$.
- $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$ quiere decir que la canasta $\mathbf{x}^0$ contiene una cantidad mayor de todos los bienes que $\mathbf{x}^1$.

Definition A1.17 Increasing, Strictly Increasing and Strongly Increasing Functions:

Let $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, where D is a subset of $\mathbb{R}^n$. Then f is increasing if $f(\mathbf{x}^0) \geq f(\mathbf{x}^1)$ whenever $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$. If, in addition, the inequality is strict whenever $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$, then we say that f is strictly increasing. If, instead, $f(\mathbf{x}^0) > f(\mathbf{x}^1)$ whenever $\mathbf{x}^0$ and $\mathbf{x}^1$ are distinct and $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$, then we say that f is strongly increasing.

Aclaración importante: En estas definiciones estamos considerando a la función en todo su dominio. Sin embargo, podríamos tener funciones que se comportan diferente según el tramo de su dominio en el cual las estemos analizando.

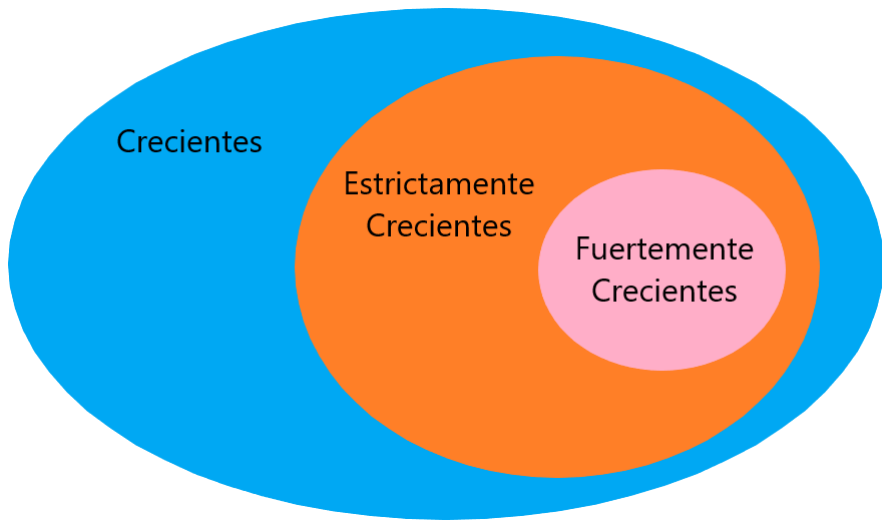


Figura 1: Funciones crecientes, estrictamente crecientes y fuertemente crecientes

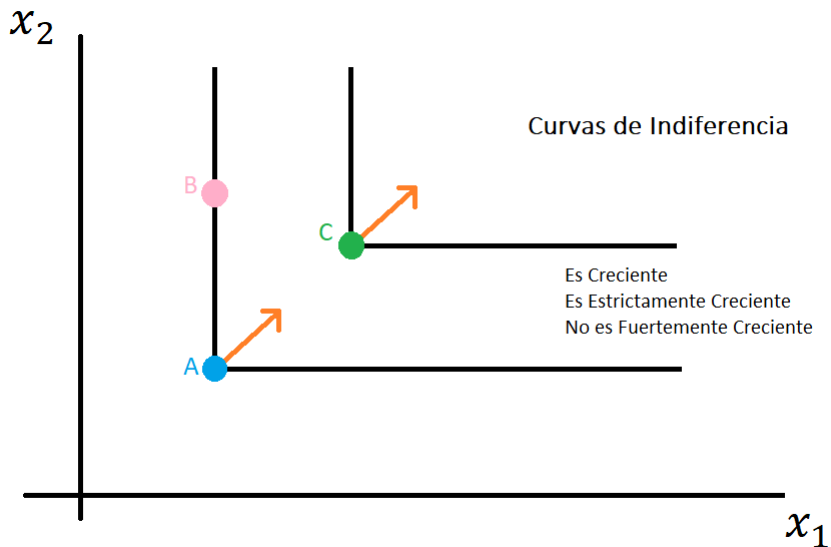


Figura 2: Bienes Complementarios Perfectos

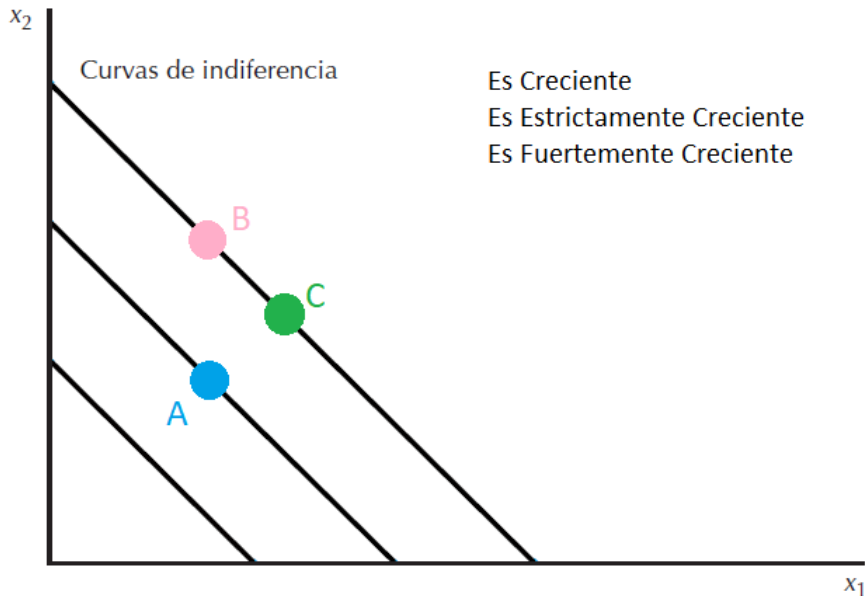


Figura 3: Bienes Sustitutivos Perfectos

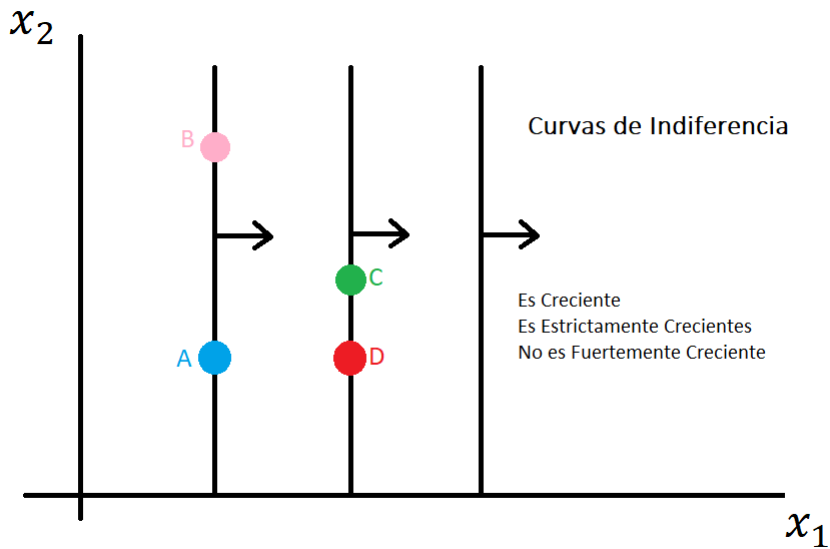


Figura 4: Bien Neutral

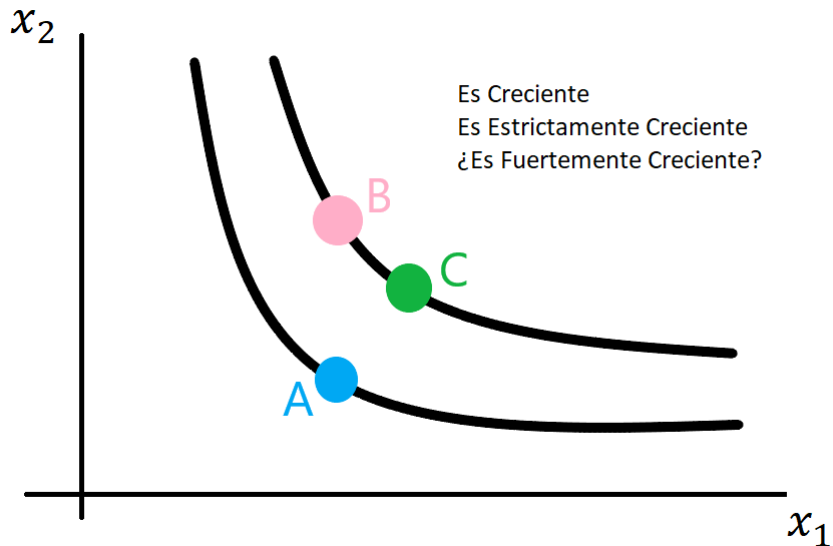


Figura 5: Preferencias Cobb-Douglas

Luego de entender las funciones crecientes, queda a cargo del estudiante entender la diferentes definiciones de funciones decrecientes:

Definition A1.18 Decreasing, Strictly Decreasing and Strongly Decreasing Functions:

Let $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, where D is a subset of $\mathbb{R}^n$. Then f is decreasing if $f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}^1)$ whenever $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$. If, in addition, the inequality is strict whenever $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$, then we say that f is strictly decreasing. If, instead, $f(\mathbf{x}^0) < f(\mathbf{x}^1)$ whenever $\mathbf{x}^0$ and $\mathbf{x}^1$ are distinct and $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$, then we say that f is strongly decreasing.

Definition A1.22 Concave Functions:

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a concave function if for all $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$,

$$f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Siendo,

$$\mathbf{x}^t = t \mathbf{x}^1 + (1 - t)\mathbf{x}^2$$

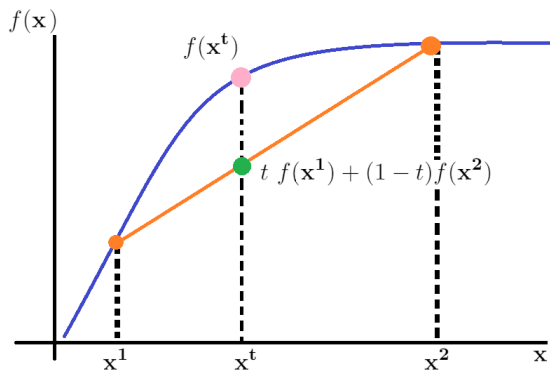


Figura 6: Función cóncava

Notar que la misma definición se puede cumplir con funciones lineales crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

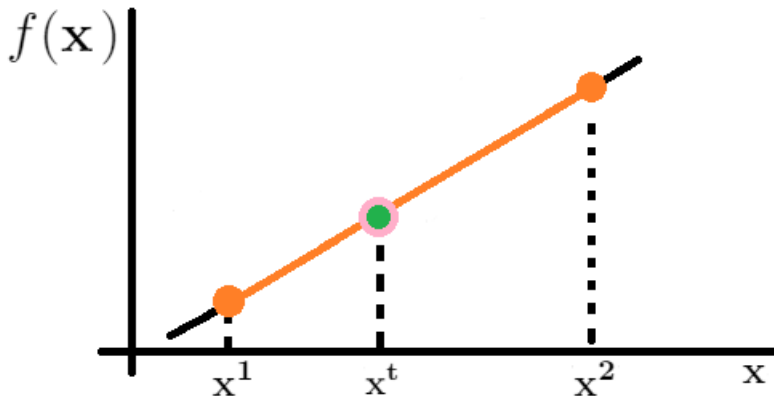


Figura 7: Función cóncava

También con funciones lineales constantes:

$$f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

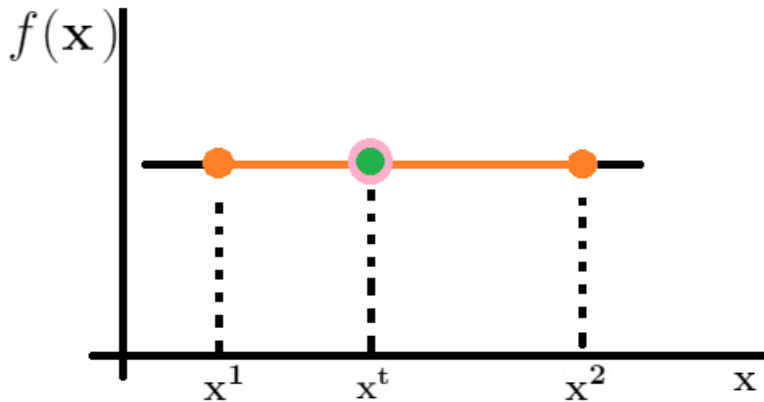


Figura 8: Función cóncava

Con funciones decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

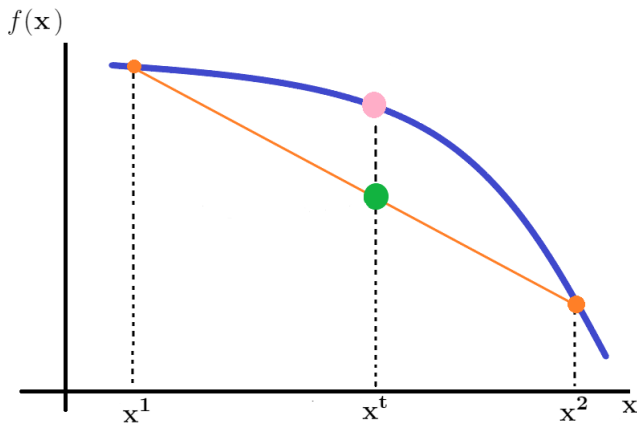


Figura 9: Función Cóncava

Con funciones lineales decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

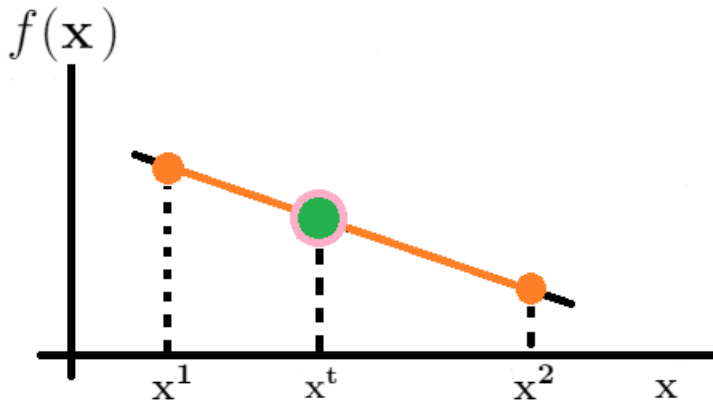


Figura 10: Función cóncava

Definition A1.23 Strictly Concave Functions:

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a strictly concave function iff, for all $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ in D ,

$$f(\mathbf{x}^t) > t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \quad \forall t \in (0, 1)$$

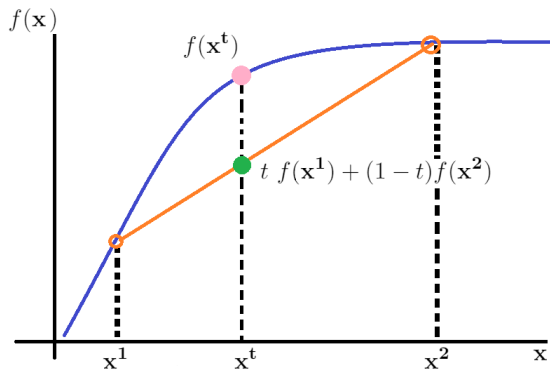


Figura 11: Función estrictamente cóncava

Notar que esta definición no se cumple con funciones lineales crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) > t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

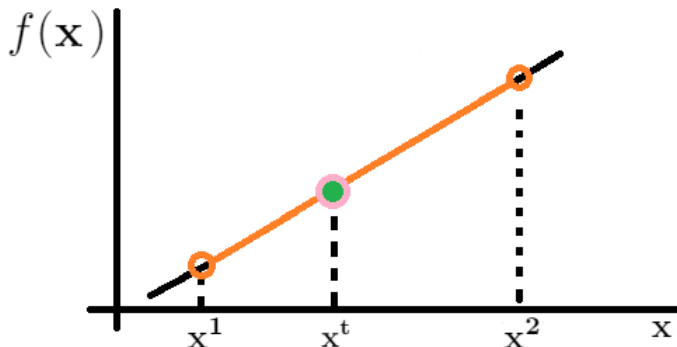


Figura 12: Función cóncava pero no estrictamente cóncava

$$f(\mathbf{x}^t) > t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \implies f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

$$f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \implies f(\mathbf{x}^t) > t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

Tampoco con funciones lineales constantes:

$$f(\mathbf{x}^t) > t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

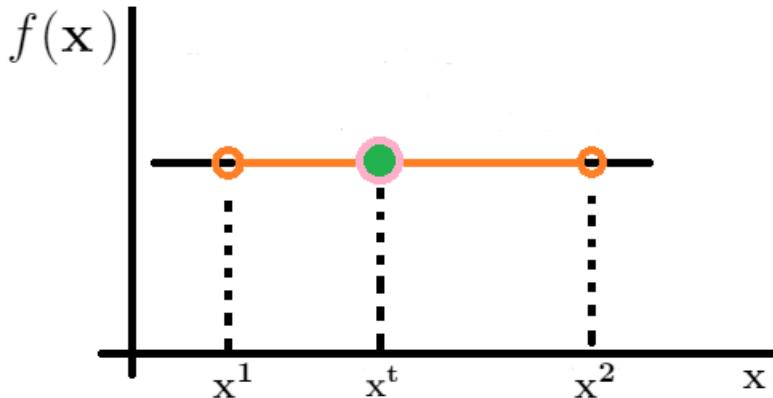


Figura 13: Función cóncava pero no estrictamente cóncava

Se puede cumplir con funciones decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) > t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

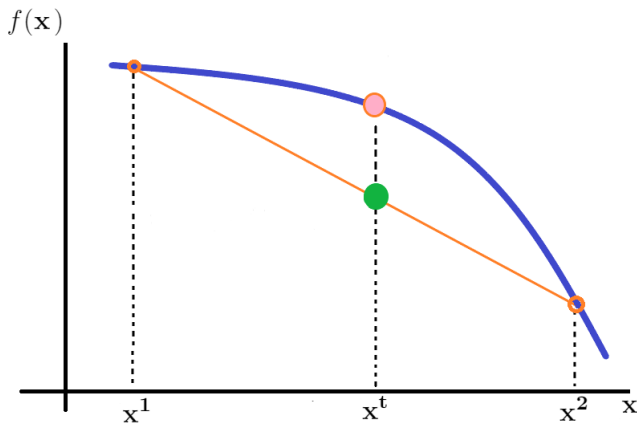


Figura 14: Función estrictamente cóncava

Pero no se cumple con funciones lineales decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) > t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

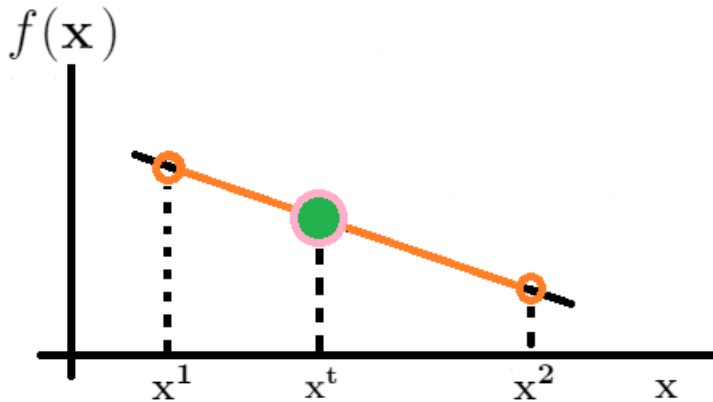


Figura 15: Función cóncava pero no estrictamente cóncava

Definition A1.24 Quasiconcave Functions:

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a quasiconcave function iff, for all $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$ in D ,

$$f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)] \quad \forall t \in [0, 1]$$

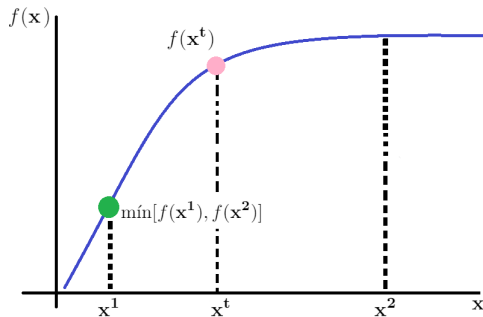


Figura 16: Función quasicóncava

$$f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \implies f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

$$f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)] \implies f(\mathbf{x}^t) \geq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

Notar que la misma definición se puede cumplir con funciones lineales crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

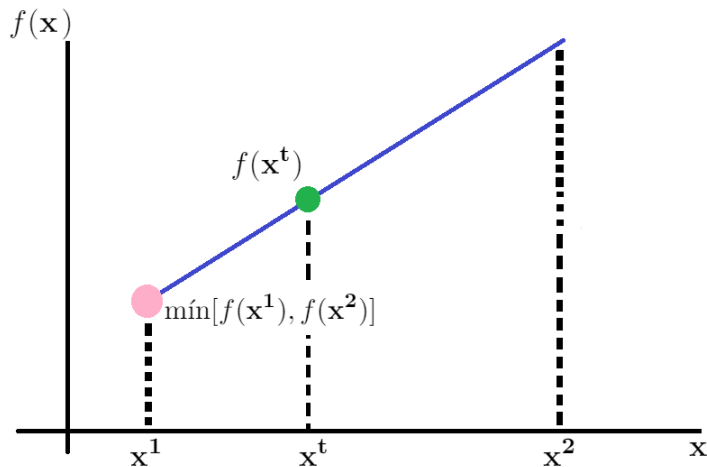


Figura 17: Función quasicóncava

También con funciones lineales constantes:

$$f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

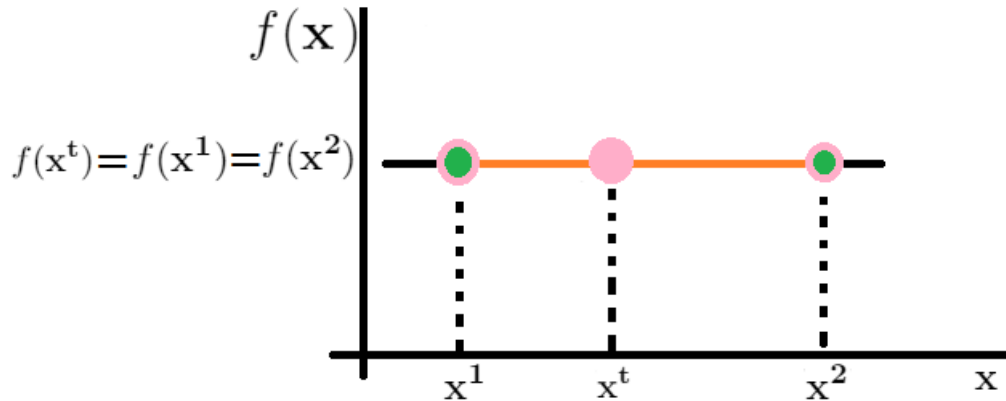


Figura 18: Función quasicóncava

También con funciones decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

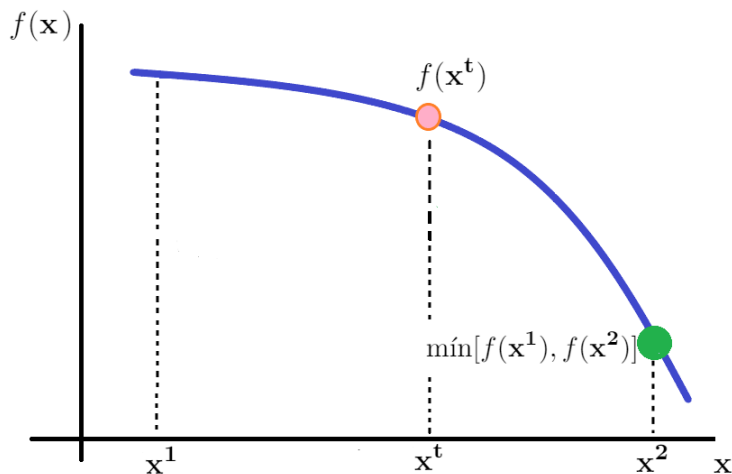


Figura 19: Función quasicóncava

También con funciones lineales decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

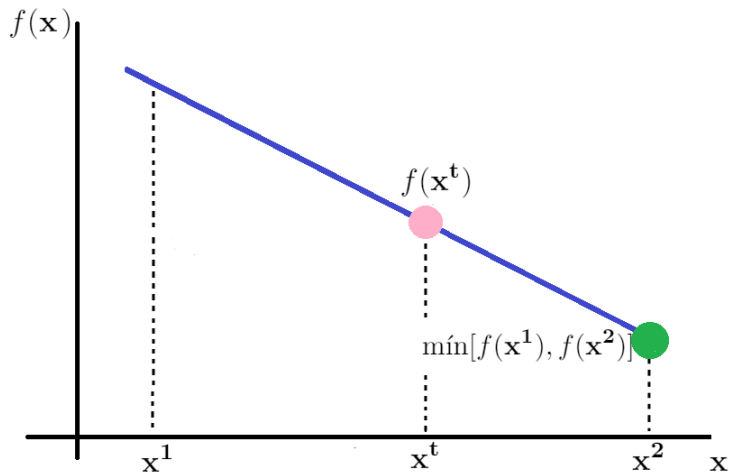


Figura 20: Función quasicóncava

Definition A1.25 Strictly Quasiconcave Functions

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a strictly quasiconcave function iff, for all $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ in D ,

$$f(\mathbf{x}^t) > \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)] \quad \forall t \in (0, 1)$$

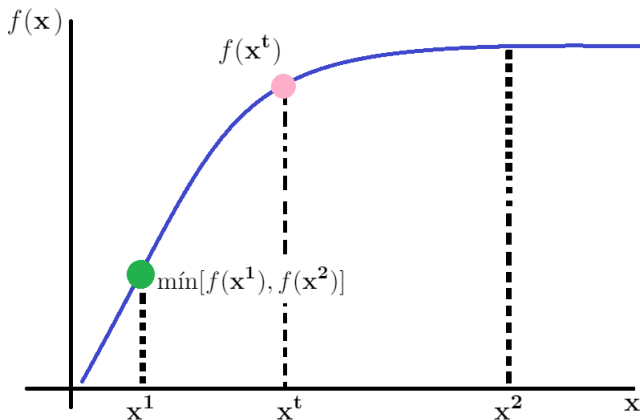


Figura 21: Función estrictamente quasicóncava

Notar que la misma definición se puede cumplir con funciones lineales crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) > \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

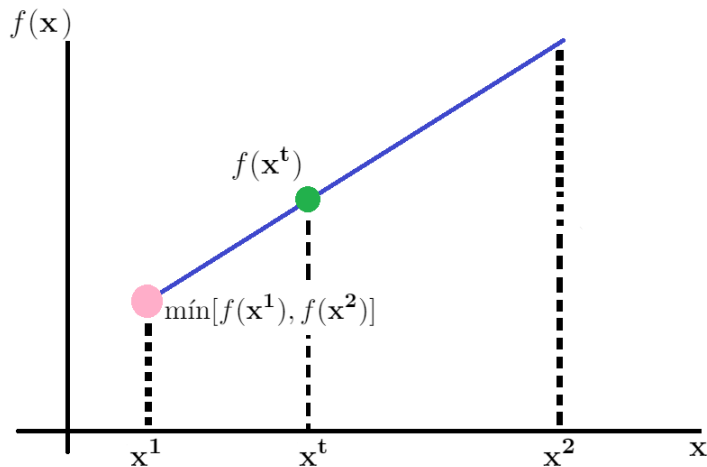


Figura 22: Función estrictamente quasicóncava

Pero no se cumple con funciones lineales constantes:

$$f(\mathbf{x}^t) > \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

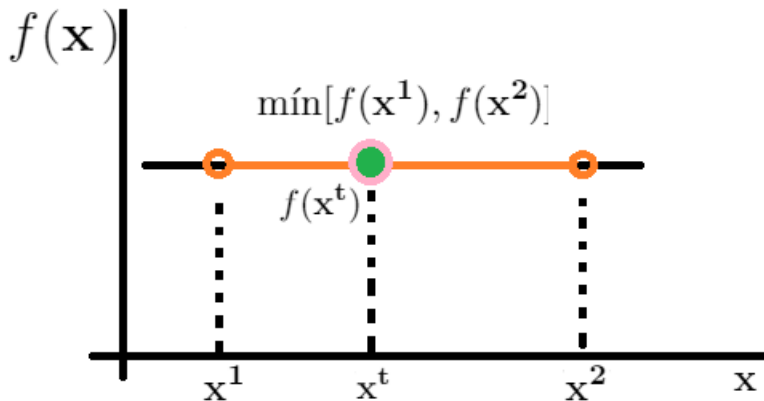


Figura 23: Función quasicóncava pero no estrictamente cuasicóncava

$$f(\mathbf{x}^t) > \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)] \implies f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

$$f(\mathbf{x}^t) \geq \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)] \not\implies f(\mathbf{x}^t) > \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

Notar que la misma definición se puede cumplir con funciones decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) > \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

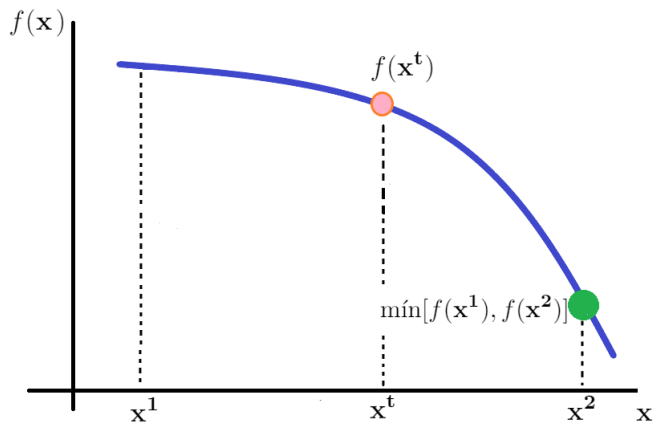


Figura 24: Función quasicóncava estricta

También se puede cumplir con funciones lineales decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) > \min[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

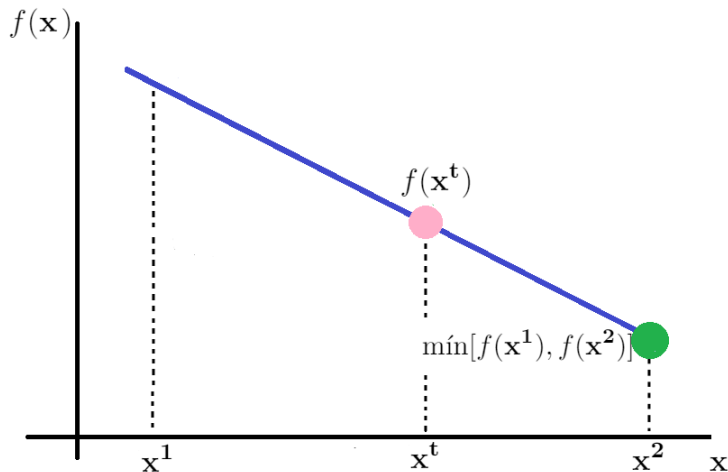


Figura 25: Función quasicóncava estricta

Definition A1.26.1 Convex Functions

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a convex function iff, for all $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ in D ,

$$f(\mathbf{x}^t) \leq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \quad \forall t \in [0, 1]$$

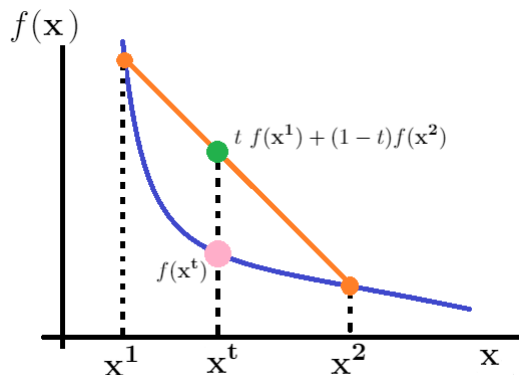


Figura 26: Función convexa

Notar que esta definición se puede cumplir con funciones lineales decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \leq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

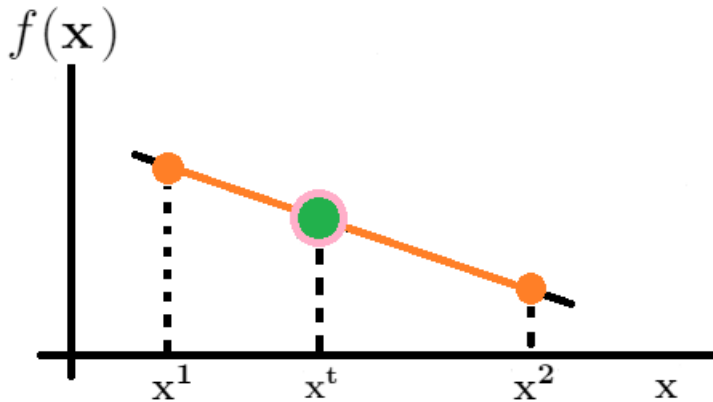


Figura 27: Función convexa

También con funciones lineales constantes:

$$f(\mathbf{x}^t) \leq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

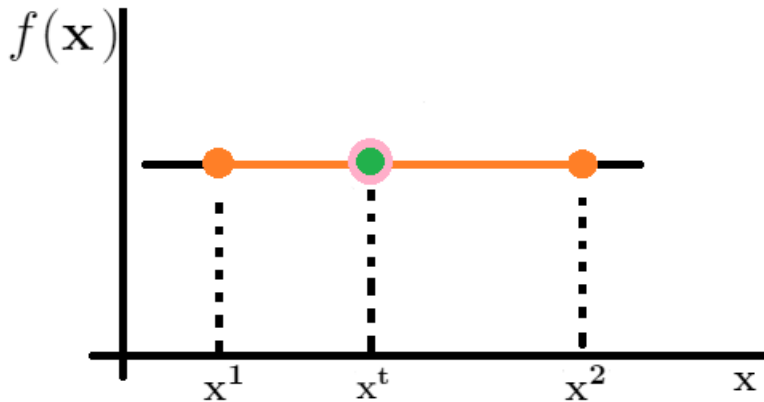


Figura 28: Función convexa

También con funciones crecientes:

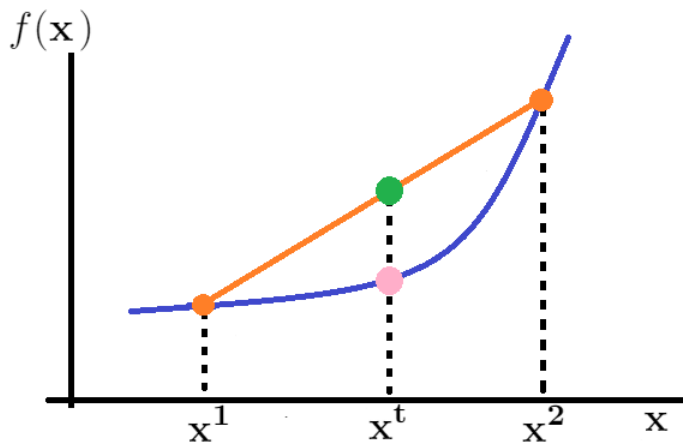


Figura 29: Función convexa

También con funciones lineales crecientes:

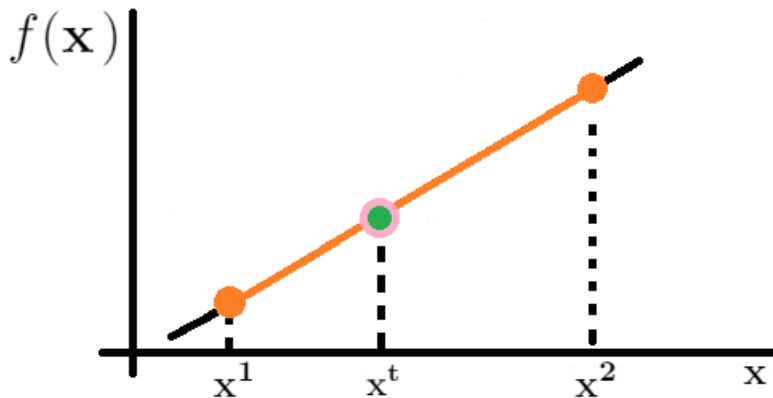


Figura 30: Función convexa

Habiendo entendido las definiciones de concavidad, concavidad estricta, quasiconcavidad, quasiconcavidad estricta, y convexidad, es posible comprender las definiciones de convexidad estricta, quasiconvexidad y quasiconvexidad estricta.

- La revisión de las siguientes definiciones queda a cargo del estudiante.

Definition A1.26.2 Strictly Convex Functions

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a strictly convex function iff, for all $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ in D ,

$$f(\mathbf{x}^t) < t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \quad \forall t \in (0, 1)$$

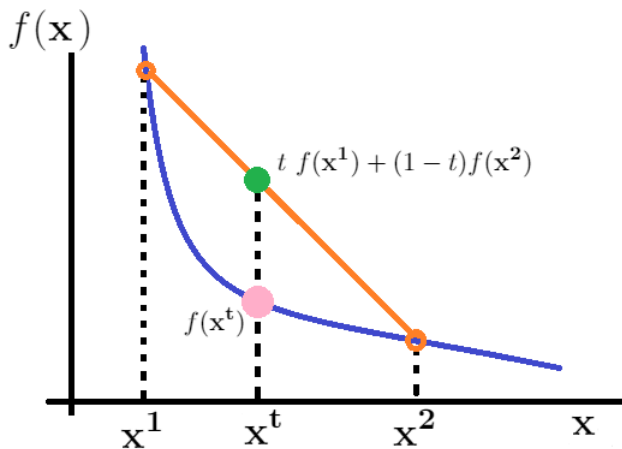


Figura 31: Función estrictamente convexa

Notar que la definición no se cumple con funciones lineales decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) < t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

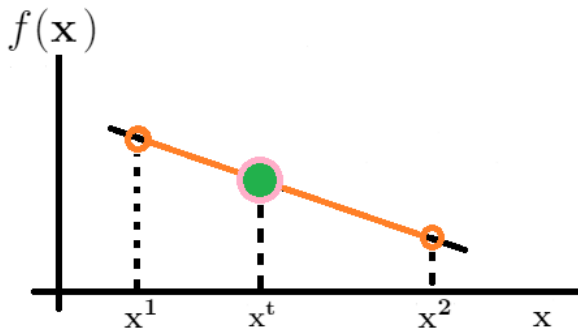


Figura 32: Función convexa pero no estrictamente convexa

$$f(\mathbf{x}^t) < t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \implies f(\mathbf{x}^t) \leq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

$$f(\mathbf{x}^t) \leq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \not\implies f(\mathbf{x}^t) < t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

Tampoco con funciones lineales constantes:

$$f(\mathbf{x}^t) < t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

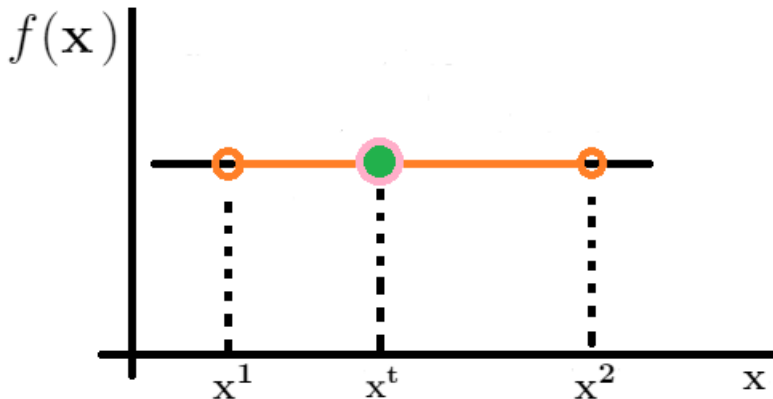


Figura 33: Función convexa pero no estrictamente convexa

Notar que la misma definición se puede cumplir con funciones crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) < t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

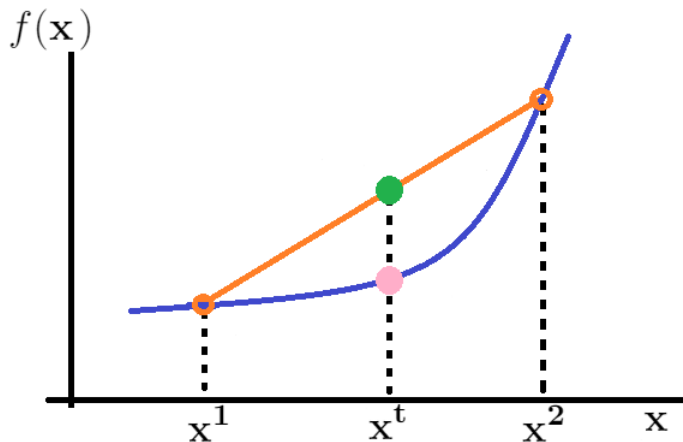


Figura 34: Función estrictamente convexa

Pero no se cumple con funciones lineales crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) < t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

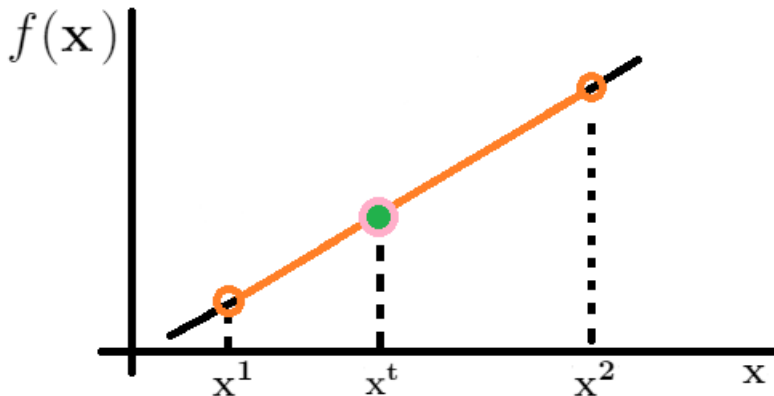


Figura 35: Función convexa pero no estrictamente convexa

Definition A1.27.1 Quasiconvex Functions

A function $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a quasiconvex function iff, for all $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$ in D ,

$$f(\mathbf{x}^t) \leq \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)] \quad \forall t \in [0, 1]$$

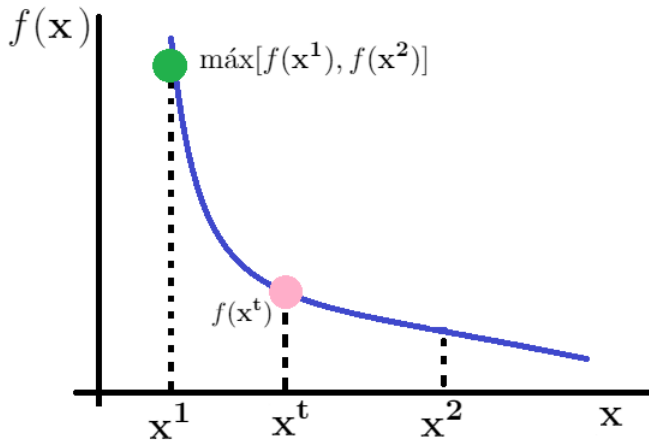


Figura 36: Función quasiconvexa

Notar que esta definición se cumple con funciones lineales decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \leq \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

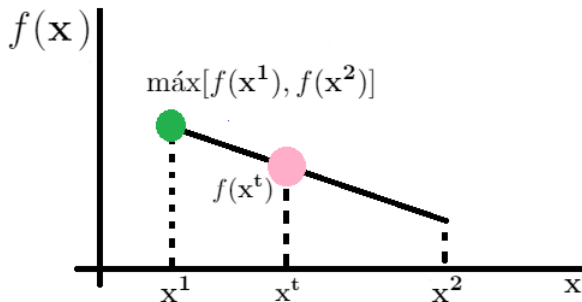


Figura 37: Función quasiconvexa

$$f(\mathbf{x}^t) \leq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2) \implies f(\mathbf{x}^t) \leq \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

$$f(\mathbf{x}^t) \leq \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)] \implies f(\mathbf{x}^t) \leq t f(\mathbf{x}^1) + (1 - t)f(\mathbf{x}^2)$$

También con funciones lineales constantes:

$$f(\mathbf{x}^t) \leq \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

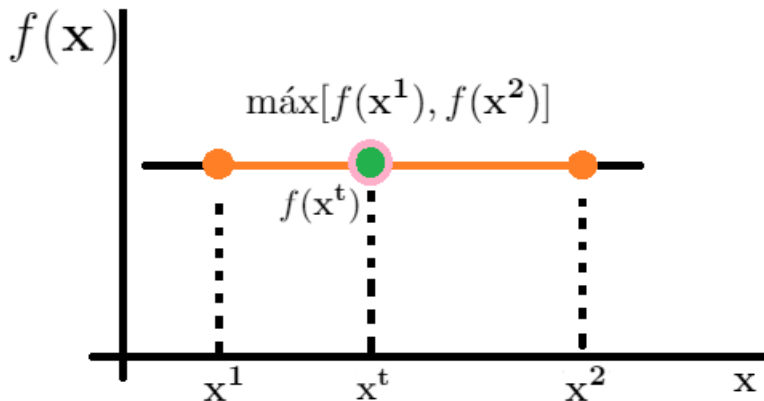


Figura 38: Función convexa

También con funciones crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \leq \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

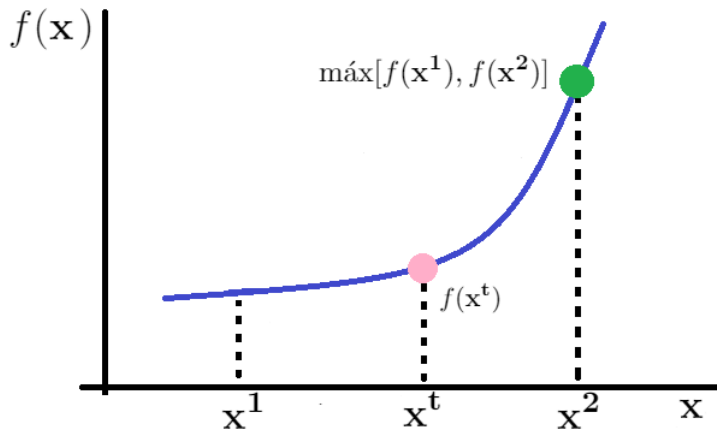


Figura 39: Función quasiconvexa

También funciones lineales crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) \leq \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

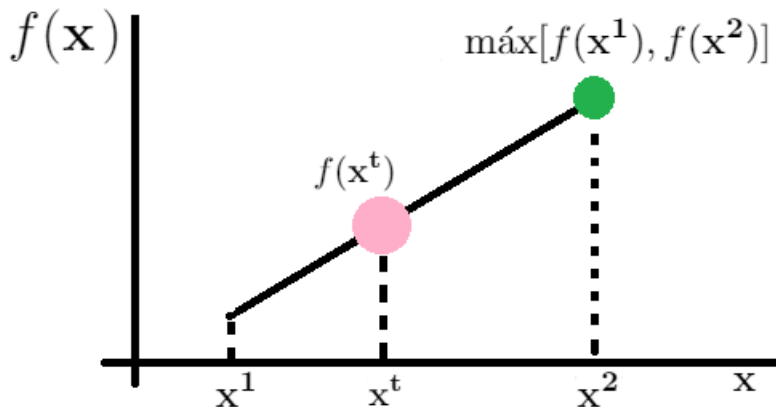


Figura 40: Función quasiconvexa

Defintion A1.27.2 Strictly Quasiconvex Functions

A function $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is a strictly quasiconvex function iff, for all $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ in D ,

$$f(\mathbf{x}^t) < \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)] \quad \forall t \in (0, 1)$$

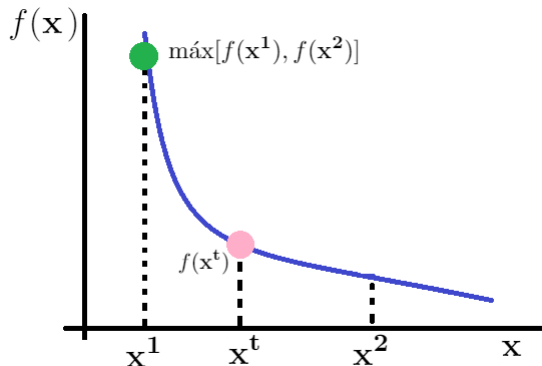


Figura 41: Función estrictamente quasiconvexa

Notar que esta definición se cumple con funciones lineales decrecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) < \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

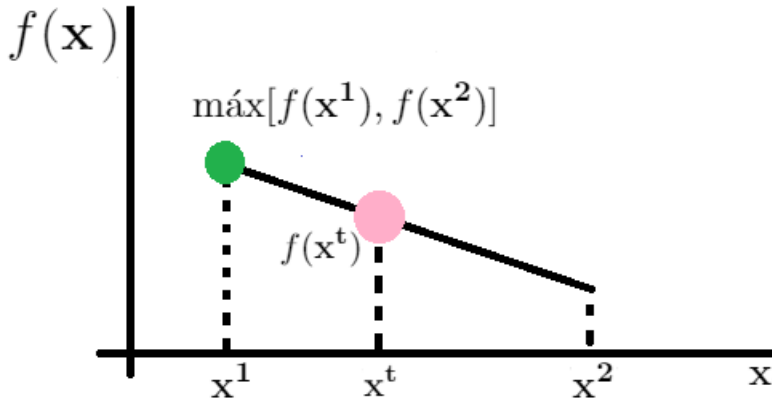


Figura 42: Función estrictamente quasiconvexa

No se cumple con funciones lineales constantes:

$$f(\mathbf{x}^t) < \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

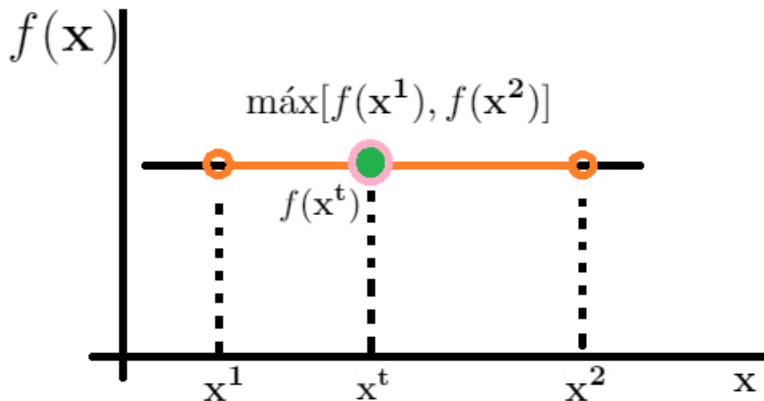


Figura 43: Función convexa pero no estrictamente quasiconvexa

Notar que la misma definición se puede cumplir con funciones crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) < \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

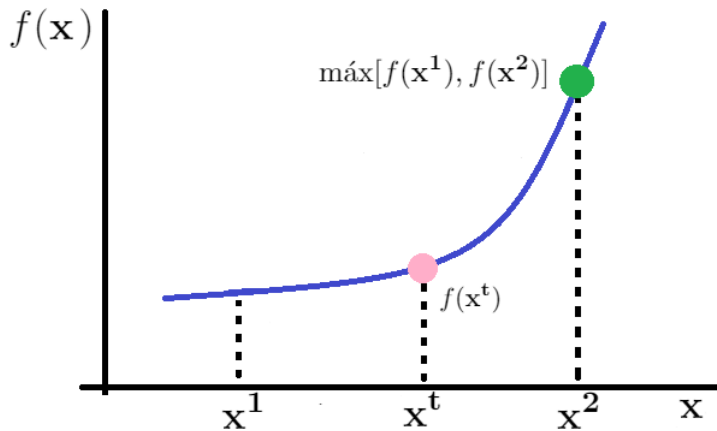


Figura 44: Función estrictamente quasiconvexa

Se cumple con funciones lineales crecientes:

$$f(\mathbf{x}^t) < \max[f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)]$$

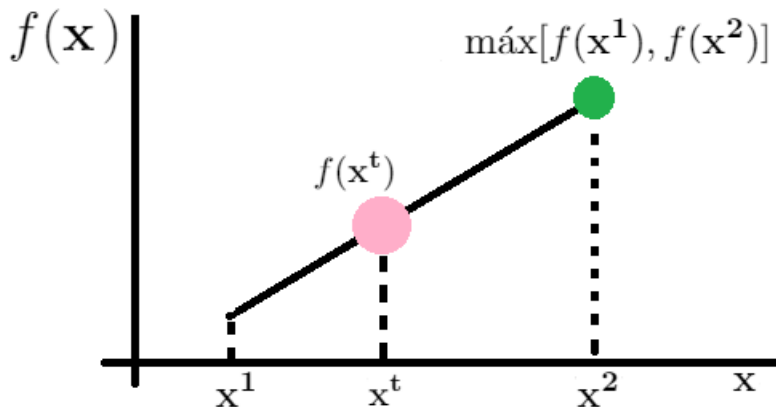


Figura 45: Función estrictamente quasiconvexa

El siguiente ejercicio queda a cargo del estudiante.

Marcar todos los tramos en los que la función es: creciente/decreciente, estrictamente creciente/decreciente, fuertemente creciente/decreciente, cóncava/convexa, estrictamente cóncava/convexa, cuasicóncava/cuasiconvexa, estrictamente cuasicóncava/cuasiconvexa.

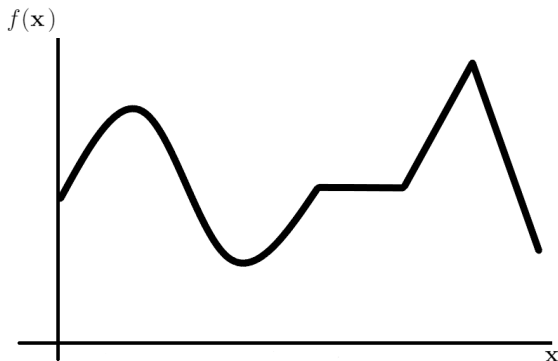


Figura 46: Ejercicio

2. Ejercicio 3.B.1 (b) de MWG

Show the Following:

b) If $\succsim$ is monotone, then it is local nonsatiated.

Nota: En MWG monotonicidad equivale a monotonicidad estricta en J&R.

Axioma 4': No Saciedad Local

$\forall \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}_+^n$, and $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \cap \mathbb{R}_+^n$ such that $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}^0$.

Siempre va a existir otro plan de consumo tal que el nuevo plan sea preferible al anterior ($\mathbf{x}^0$).

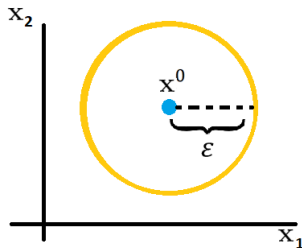


Figura 47: Axioma de No Saciedad Local

Axioma 4: Monotonicidad Estricta

$\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}_+^n$, if $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$ then $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$, while if $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$, then $\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^1$.

Monotonicidad estricta dice que:

1. si una canasta contiene al menos tanto de cada bien como otra canasta, entonces la primera canasta es al menos tan buena como la segunda.
2. una canasta va a ser estrictamente mejor que otra si contiene una mayor cantidad de todos los bienes.

Demostración

Asumiendo que $\succsim$ son monotonas, $\mathbf{x} \in X$, y $\varepsilon > 0$. Siendo $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\varepsilon/\sqrt{n})e$, despejando: $\sqrt{n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \varepsilon$, obtenemos

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$$

con $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. Por lo tanto, $\succsim$ es localmente no saciada.

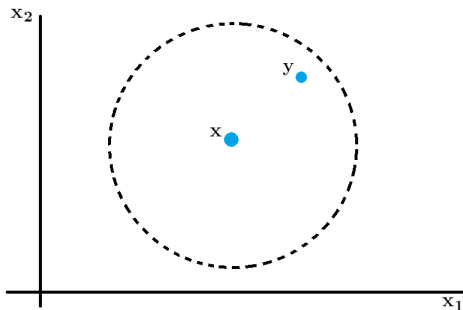


Figura 48: Demostración del ejercicio 3.B.1 (b) de MWG

3. Demostrar Proposición 1.B.2 de MWG

Proposition 1.B.2: A preference relation $\succsim$ can be represented by a utility function only if it is rational.

Nota: Racionalidad = transitividad + completitud

De Microeconomía 1 sabemos que:

- Una función de utilidad resume la información contenida en la relación de preferencias del consumidor.

Definition 1.5: Utility Function.

A real-valued function $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ is called a utility function representing the preference relation $\succsim$, if for all $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}_+^n$, $u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1) \iff \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$.

Queremos demostrar que la racionalidad es una condición **necesaria** para que las preferencias se puedan representar con una función de utilidad.

La racionalidad involucra 2 axiomas, completitud y transitividad:

Axioma 1: Completitud.

For all $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$ in X , either $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^1$ or $\mathbf{x}^2 \sim \mathbf{x}^1$.

Lo que nos permite la completitud es comparar cualquier par de canasta del conjunto de consumo. Si, comparando entre 2 canastas, las preferencias del consumidor no son capaces de identificar cual de ellas prefiere (no se cumple el axioma), la función de utilidad no puede asignarle un numero para poder comparar esa canasta con cualquier otra del conjunto de consumo. Por lo tanto, las preferencias no serian representables por una función de utilidad.

Axioma 2: Transitividad.

For any three elements $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ in X if $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^2$ and $\mathbf{x}^2 \succsim \mathbf{x}^3$ then $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^3$.

Suponiendo que existe una función de utilidad que representa preferencias racionales, se debe cumplir que $U(\mathbf{x}^1) \geq U(\mathbf{x}^2)$, $U(\mathbf{x}^2) \geq U(\mathbf{x}^3)$ y $U(\mathbf{x}^1) \geq U(\mathbf{x}^3)$.

Si no se cumple transitividad entonces, por ejemplo:

$$\mathbf{x}^1 \succ \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^3 \succ \mathbf{x}^1$$

Aplicando la definición de función de utilidad, entonces tendría que suceder,

$$U(\mathbf{x}^1) > U(\mathbf{x}^2), U(\mathbf{x}^2) > U(\mathbf{x}^3), U(\mathbf{x}^3) > U(\mathbf{x}^1)$$

Lo cual es un absurdo.

4. Ejercicio 1.8 de J&R.

Sketch a map of indifference sets that are all parallel, negatively sloped straight lines, with preference increasing north-easterly. We know that preferences such as these satisfy Axioms 1, 2, 3, and 4. Prove that they also satisfy Axiom 5'. Prove that they do not satisfy Axiom 5.

Axioma 5': Convexidad.

If $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$, then $t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^0$ for all $t \in [0, 1]$.

Axioma 5: Convexidad Estricta

If $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ and $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$, then $t\mathbf{x}^1 + (1-t)\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^0$ for all $t \in (0, 1)$

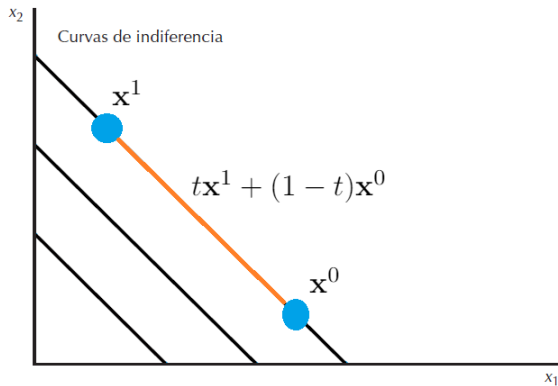


Figura 50: Sustitutos Perfectos

5. Ejercicio 1.9 de J&R.

Sketch a map of indifference sets that are all parallel right angles that 'kink' on the line $x_1 = x_2$. If preference increases north-easterly, these preferences will satisfy Axioms 1, 2, 3, and 4'. Prove that they also satisfy Axiom 5'. Do they satisfy Axiom 4? Do they satisfy Axiom 5?

Axioma 4: Monotonicidad Estricta.

$\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}_+^n$, if $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{x}^1$ then $\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$, while if $\mathbf{x}^0 \gg \mathbf{x}^1$, then $\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^1$.

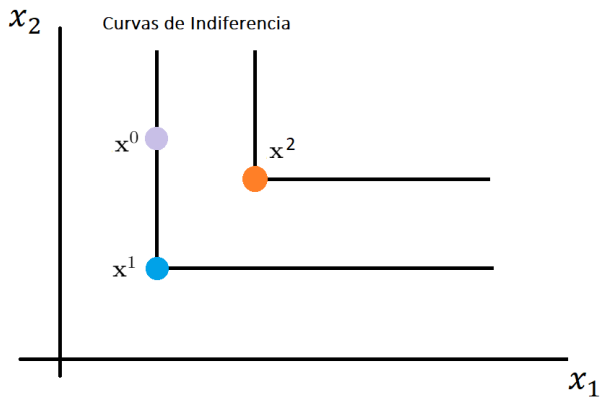


Figura 51: Complementarios Perfectos satisface el axioma 4.

Axioma 5': Convexidad.

If $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$, then $t\mathbf{x}^1 + (1 - t)\mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^0$ for all $t \in [0, 1]$.

Axioma 5: Convexidad Estricta.

If $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$ and $\mathbf{x}^1 \succsim \mathbf{x}^0$, then $t\mathbf{x}^1 + (1 - t)\mathbf{x}^0 \succ \mathbf{x}^0$ for all $t \in (0, 1)$.

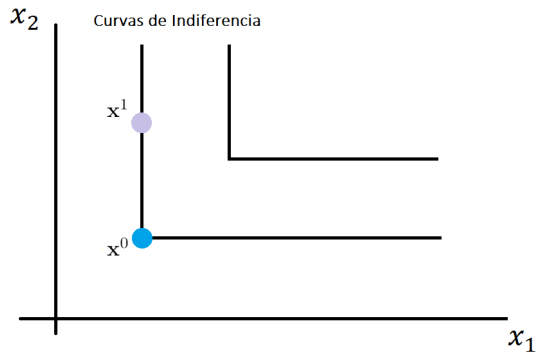


Figura 52: Complementarios Perfectos satisface el axioma 5' pero no el 5.

6. Interpretar las condiciones requeridas por, y las implicancias del Teorema A1.10 de J&R.

Theorem A1.10 (Weierstrass) Existence of Extreme Values.

Let $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous real-valued mapping where S is a non-empty compact subset of $\mathbb{R}^n$. Then there exist a vector $\mathbf{x}^* \in S$ and a vector $\bar{\mathbf{x}} \in S$ such that:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*) \text{ for all } \mathbf{x} \in S$$

Las condiciones requeridas por el teorema de Weierstrass son:

1. La función f sea continua.
2. S sea un conjunto no vacío compacto (cerrado y acotado).

Definición: Conjunto Cerrado.

La frontera pertenece al conjunto.

Definición: Conjunto Acotado.

Esta totalmente contenido por una bola de radio $\varepsilon > 0$ cuyo centro es un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$.

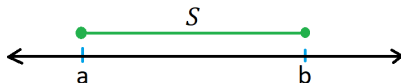


Figura 53: Ejemplo de conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^1$.

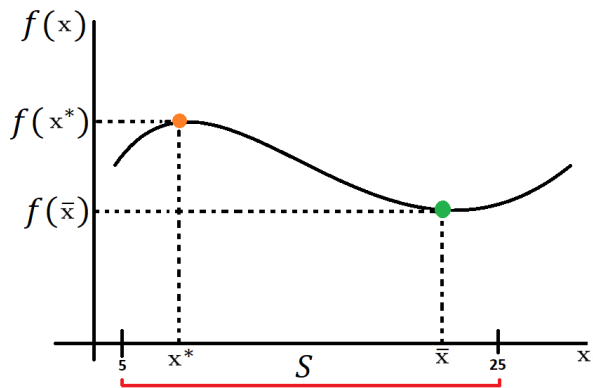


Figura 54: Teorema de Weierstrass

En teoría del consumidor solemos maximizar una función de utilidad que es continua sobre el conjunto presupuestario que es no vacío, cerrado y acotado (compacto).

Es no vacío porque la canasta nula pertenece al conjunto. Es cerrado porque el consumidor puede gastar toda su renta, y elegir consumir 0 de cualquiera de los bienes. Es acotado siempre que los precios sean positivos.

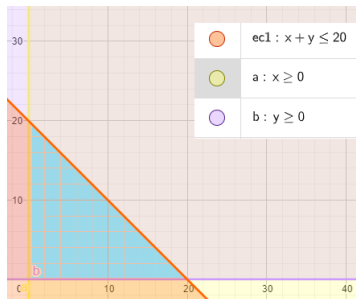


Figura 55: Conjunto Presupuestario

7. Interpretar el Teorema de Lagrange

Nota: el Teorema de Lagrange es el A2.16 de J&R.

Recordemos la función de Lagrange:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = f(\mathbf{x}^*) - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g^j(\mathbf{x}^*)$$

En cualquier máximo/mínimo local de una función evaluada bajo restricciones de **igualdad** (si son las adecuadas), el gradiente de la función objetivo en ese punto se puede expresar como una combinación lineal de los gradientes de las restricciones, con los multiplicadores de Lagrange como coeficientes (i.e. en el óptimo λ^*).

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g^j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g^j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g^j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g^j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}$$

...

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g^j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g^j(\mathbf{x}^*)$$

8. Interpretar las condiciones requeridas por, y las implicancias del Teorema A2.20 de J&R.

Theorem A2.20 (Kuhn-Tucker) Necessary Conditions for Maxima of Real-Valued Functions Subject to Inequality Constraints

Let $f(\mathbf{x})$ and $g^j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$ be continuous real-valued functions defined over some domain $D \in \mathbb{R}^n$. Let $\mathbf{x}^*$ be an interior point of D and suppose that $\mathbf{x}^*$ maximises $f(\mathbf{x})$ on D subject to the constraints $g^j(\mathbf{x}) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$, and that f and each g^j are continuously differentiable on an open set containing $\mathbf{x}^*$. If the gradient vectors $\nabla g^j(\mathbf{x}^*)$ associated with constraints j that bind at $\mathbf{x}^*$ are linearly independent, then there is a unique vector $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$, such that $(\mathbf{x}^*; \lambda^*)$ satisfies the Kuhn-Tucker conditions:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g^j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_j^* \geq 0, \quad g^j(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad \lambda_j^* g^j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Condiciones **necesarias** para aplicar el teorema:

1. $f(x)$ y $g(x)$ deben ser funciones continuas que toman valores reales.
2. $f(x)$ y $g(x)$ deben ser diferenciables.

Una función es diferenciable si es continua y “suave”, sin *kinks* ni saltos. Por lo tanto, la diferenciabilidad es una definición mas restringida que la continuidad.

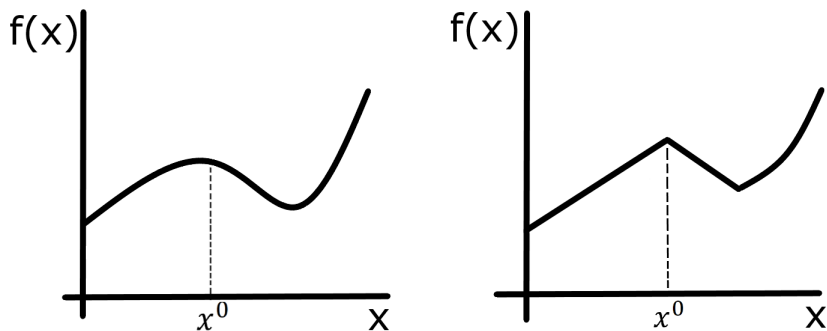


Figura 58: Funciones diferenciables y no diferenciables

En general, si trabajamos con 1 sola restricción no tendremos que preocuparnos por que se cumpla la independencia.

Hay que tener en cuenta que el teorema de Kuhn-Tucker afirma que estas condiciones son necesarias y no suficientes, es decir que, si existe un máximo, estas condiciones deben cumplirse obligatoriamente, sin embargo, estas condiciones puede cumplirse sin existir un punto máximo.

Veremos que para muchos de los problemas que resolveremos en el curso estas condiciones también serán suficientes.

9. Interpretar el Teorema de la Envolvente.

Nota: El teorema de la Envolvente es el A2.22 de J&R.

Antes de enunciar el Teorema de la envolvente consideremos el siguiente problema:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \text{ s.t. } g^j(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq 0, j = 1, \dots, m \quad (\text{A2.35})$$

Donde $\mathbf{x}$ es un vector de variables de elección, y $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_L)$ es un vector de parámetros que podrían entrar en la función objetivo, las restricciones, o ambos.

El Teorema de la Envolvente.

Considere el problema (A2.35) suponiendo una sola restricción g , y una función objetivo f , ambas continuamente diferenciables en $(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ sobre un subconjunto abierto W (e.g. bienes) $\times U$ (parámetros) de $\mathbb{R}^n \times A$.

Para cada $\mathbf{a} \in U$ suponga que $\mathbf{x}(\mathbf{a}) \in W$ es la solución (única) para (A2.35), que es continuamente diferenciable en $\mathbf{a}$ sobre U , y que la restricción $g(\mathbf{x}(\mathbf{a}), \mathbf{a}) \leq 0$ está activa $\forall \mathbf{a} \in U$ (¿por qué tiene sentido aquí?).

$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \lambda)$ será la función de Lagrange asociada al problema y $(\mathbf{x}(\mathbf{a}), \lambda(\mathbf{a}))$ la solución de las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker.

La solución la podemos expresar como una función que depende de los parámetros. A estas funciones, que están valuadas en las elecciones óptimas y que solo dependen de los parámetros las llamamos funciones de valor. Existen funciones de valor para problemas de maximización y de minimización.

$V(\mathbf{a})$ es la función de valor asociada al problema.

Luego, el Teorema de la envolvente establece que $\forall \mathbf{a} \in U$,

$$\frac{\partial V(\mathbf{a})}{\partial a_j} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{x}(\mathbf{a}), \lambda(\mathbf{a})} \quad j = 1, \dots, m$$

donde el RHS muestra la derivada parcial del Lagrangiano con respecto a a_j evaluada en el punto $(\mathbf{x}(\mathbf{a}), \lambda(\mathbf{a}))$.

Pregunta: ¿Si hubiera un cambio en un parámetro habría que reoptimizar nuevamente para luego deducir cuál es el efecto sobre el valor optimizado?

- Cuando cambia un parámetro, el efecto total sobre el valor optimizado de una función objetivo se puede deducir derivando parcialmente el Lagrangiano del problema de maximización respecto del parámetro y evaluándola en la solución original a las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker del problema.

10. Ejercicio 3.C.6 de MWG.

Suppose that in a two-commodity world, the consumer's utility function takes the form $u(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}$. This utility function is known as the constant elasticity of substitution (or CES) utility function.

- (a) Show that when $\rho = 1$, indifference curves become linear
- (b) Show that as $\rho \rightarrow 0$, this utility function comes to represent the same preferences as the (generalized) Cobb-Douglas utility function $u(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$
- (c) Show that as $\rho \rightarrow -\infty$, indifference curves become “right angles”; that is, this utility function has in the limit the indifference map of the Leontief utility function $u(x_1, x_2) = \text{Min}[x_1, x_2]$

(a) Show that when $\rho = 1$, indifference curves become linear

$$u(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}$$

$$\rho = 1$$

$$u(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1)^{1/1}$$

$$u(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

Función de Utilidad de Bienes Sustitutos Perfectos.

(b) Show that as $\rho \rightarrow 0$, this utility function comes to represent the same preferences as the (generalized) Cobb-Douglas utility function $u(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$

$$u(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}$$

Por simplicidad vamos a trabajar con una transformación monótona positiva y vamos a asumir, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$:

$$\bar{u}(\mathbf{x}) = \ln(u(\mathbf{x})) = \frac{1}{\rho} \ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)$$

Ahora vamos a observar que ocurre cuando $\rho \rightarrow 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$$

El límite es indeterminado, tenemos que salvarlo.

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho}$$

Aplico L'Hopital (derivo el numerador y el denominador respecto ρ). La derivada del denominador es 1, y la del numerador es:

$$\frac{\partial \ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho} \frac{\partial(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\partial \rho}$$

Para facilitar la derivación reexpreso x_i^ρ de la siguiente forma:

$$\alpha_i x_i^\rho = \alpha_i e^{\rho \ln(x_i)} = \alpha_i e^{\rho \ln(x_i)}$$

Veamos como sería la derivada de x_i^ρ (utilizaremos regla de la cadena):

$$\frac{\partial \alpha_i x_i^\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \alpha_i e^{\rho \ln(x_i)}}{\partial \rho} = \alpha_i e^{\rho \ln(x_i)} \ln(x_i) = \alpha_i x_i^\rho \ln(x_i)$$

Entonces el resultado al aplicar L'Hopital nos lleva a reexpresar el límite como:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\alpha_1 x_1^\rho \ln(x_1) + \alpha_2 x_2^\rho \ln(x_2)}{\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho}$$

Resolvemos el limite, aplicamos propiedad del logaritmo y que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\alpha_1 x_1^p \ln(x_1) + \alpha_2 x_2^p \ln(x_2)}{\alpha_1 x_1^p + \alpha_2 x_2^p} = \frac{\alpha_1 \ln(x_1) + \alpha_2 \ln(x_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} = \ln(x_1^{\alpha_1}) + \ln(x_2^{\alpha_2})$$

Finalmente:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \bar{u}(\mathbf{x}) = \ln(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2})$$

Aplicando una transformación monótona positiva obtenemos una funcion de utilidad $w(\mathbf{x})$ que tiene una forma funcional Cobb-Douglas :

$$w(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

(c) Show that as $\rho \rightarrow -\infty$, indifference curves become “right angles”; that is, this utility function has in the limit the indifference map of the Leontief utility function $u(x_1, x_2) = \text{Min}[x_1, x_2]$

$$u(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}$$

$$\rho \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{\rho \rightarrow -\infty} (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho} = 0^0$$

El limite es indeterminado, tenemos que salvarlo.

Suponemos que $x_1 \leq x_2$, queremos demostrar que:

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} (\alpha_1 x_1^p + \alpha_2 x_2^p)^{1/p} = \text{Min}[x_1, x_2] = x_1$$

Como $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, sabemos que:

$$\alpha_1 x_1^\rho \leq \alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho$$

Elevo todo a la $1/\rho$:

$$\alpha_1^{1/\rho} x_1 \leq (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho} \quad (1)$$

Dado que $\rho < 0$, como $x_1 \leq x_2$, entonces se debe cumplir que:

$$\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho \leq \alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_1^\rho = (\alpha_1 + \alpha_2) x_1^\rho$$

Elevo todo a la $1/\rho$:

$$(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho} \leq (\alpha_1 + \alpha_2)^{1/\rho} x_1 \quad (2)$$

Juntando (1) y (2):

$$\alpha_1^{1/\rho} x_1 \leq (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho} \leq (\alpha_1 + \alpha_2)^{1/\rho} x_1 \quad (3)$$

Aplico el limite a las expresiones en los extremos de (3). Primero lo hago sobre la expresi3n del extremo izquierdo:

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \alpha_1^{1/\rho} x_1 = x_1$$

Luego lo hago sobre la expresi3n del extremo derecho:

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} (\alpha_1 + \alpha_2)^{1/\rho} x_1 = x_1$$

Recordamos (3):

$$\alpha_1^{1/\rho} x_1 \leq (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho} \leq (\alpha_1 + \alpha_2)^{1/\rho} x_1$$

Reemplazo por los limites cuando $p \rightarrow -\infty$:

$$x_1 \leq \lim_{p \rightarrow -\infty} (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho} \leq x_1$$

Por lo tanto:

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho} = x_1 = \text{Min}[x_1, x_2]$$

11. Interpretar condiciones e implicancias del Teorema A2.21 de J&R.

Primero recordemos el problema de optimización A2.35 de J&R:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \text{ s.t. } g^j(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq 0, j = 1, \dots, m \quad (\text{A2.35})$$

Theorem A2.21 The Theorem of the Maximum²

Suppose that S is compact, that $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, and that constraint-continuity is satisfied. Then,

1. A solution to (A2.35) exists for every $\mathbf{a} \in A$, and therefore the value function $V(\mathbf{a})$ is defined on all of A .
2. The value function, $V : A \rightarrow \mathbb{R}$, is continuous.
3. Suppose that $(\mathbf{x}^k; \mathbf{a}^k)$ is a sequence in $\mathbb{R}^n \times A$ converging to $(\mathbf{x}^*; \mathbf{a}^*) \in \mathbb{R}^n \times A$. If for every k , $\mathbf{x}^k$ is a solution to (A2.35) when $\mathbf{a} = \mathbf{a}^k$, then $\mathbf{x}^*$ is a solution to (A2.35) when $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$.
4. If for every $\mathbf{a} \in A$ the solution to (A2.35) is unique and given by the function $\mathbf{x}(\mathbf{a})$, then $\mathbf{x} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous.

²Puede revisar el Teorema del Máximo y su demostración en Jehle & Reny (2011, pp 602-603).

Condiciones Necesarias:

1. S sea compacto.
2. f sea una función continua.
3. se satisface constraint-continuity.

Constraint-Continuity

Say that the constraint-continuity is satisfied if each $g^j : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, and for every $(\mathbf{x}^0; \mathbf{a}^0) \in \mathbb{R}^n \times A$ satisfying the m constraints, $g^1(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \leq 0, \dots, g^m(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \leq 0$, and for every sequence $\mathbf{a}^k$ in A converging to $\mathbf{a}^0$, there is a sequence $\mathbf{x}^k$ in $\mathbb{R}^n$ converging to $\mathbf{x}^0$ such that $(\mathbf{x}^k; \mathbf{a}^k)$ satisfies the constraints for every k .

Definition A1.12 Sequences in $\mathbb{R}^n$

A sequence in $\mathbb{R}^n$ is a function mapping some infinite subset I of positive integers into $\mathbb{R}^n$. We shall denote a sequence by $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in I}$ where $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ for every $k \in I$.

$$\{\mathbf{x}^k\}_{k \in I} \quad I \rightarrow 1, 2, 3, 4, \dots$$

Ejemplos:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots \quad \text{la cual surge de:} \quad \mathbf{a}^k = 2^{k-1}$$

$$3, 7, 11, 15, 19, \dots \quad \text{la cual surge de:} \quad \mathbf{a}^k = 3 + (k - 1) * 4$$

$$\binom{1}{3}, \binom{2}{7}, \binom{4}{11}, \binom{8}{15}, \dots \quad \text{Podemos tener n elementos.}$$

Definition A1.13 Convergent Sequences

A sequence $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in I}$ converges to $\mathbf{x}$ if for every $\varepsilon > 0$, there is a $\bar{k}$ such that $\mathbf{x}^k \in B_\varepsilon(\mathbf{x})$ for all $k \in I$ exceeding $\bar{k}$.

Lo que quiere decir esto es que si para un k lo suficientemente grande la secuencia se acerca a un valor de $\mathbb{R}^n$, decimos que la secuencia converge a ese valor.

Ejemplos:

La secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ converge a 0, surgiendo de: $\mathbf{a}^k = \frac{1}{k}$

La secuencia $1^1, 1^2, 1^3, 1^4, \dots$ converge a 1, surgiendo de: $\mathbf{a}^k = 1^k$