

Práctica I GE: Equilibrio

Microeconomía II - Curso: Paulo Pascuini

Santiago Rodríguez Vázquez, Francisco Alonso Belgrano¹

Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

Abril 2025

¹Esta presentación se hizo con colaboración de Paulo Pascuini, Juana Fernández Zabala, Julián Arias, Dante Engrassia, Sofía Martín y Guido Schiavi.

Temario de las practicas

- Equilibrio de trueque y núcleo.
- Existencia de equilibrio competitivo.
- Eficiencia (Primer y Segundo Teorema del Bienestar).
- Núcleo y equilibrio competitivo.

Recordemos algunas definiciones

- **Pareto-Efficient Allocations:** A feasible allocation $\mathbf{x} \in F(\mathbf{e})$ is pareto efficient if there is no other feasible allocation, $\mathbf{y} \in F(\mathbf{e})$, such that $\mathbf{y}^i \succsim^i \mathbf{x}^i$ for all consumers, i , with at least one preference strict.
- **The Core of an Exchange Economy:** The core of an exchange economy with endowment $\mathbf{e}$, denoted $C(\mathbf{e})$, is the set of all unblocked feasible allocations.
- **Walrasian Equilibrium:** A vector $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_{++}^*$ is called a Walrasian equilibrium if $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.
- **Walrasian Equilibrium Allocations:** Let $\mathbf{p}^*$ be a Walrasian equilibrium for some economy with initial endowments $\mathbf{e}$, and let

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) = (\mathbf{x}^1(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \mathbf{e}^1), \dots, \mathbf{x}^I(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \mathbf{e}^I))$$

where component i gives the n -vector of goods demanded and received by consumer i at $\mathbf{p}^*$. Then $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ is called a Walrasian equilibrium allocation, or WEA.

Ejercicio A.2

Consigna (Ejercicio 5.11 de J&R):

Consider a 2×2 economy. Utility functions and endowments are:

$$\begin{aligned} u^1(x_1^1, x_2^1) &= (x_1^1 x_2^1)^2 \text{ and } \mathbf{e}^1 = (18, 4), \\ u^2(x_1^2, x_2^2) &= \ln(x_1^2) + 2 \ln(x_2^2) \text{ and } \mathbf{e}^2 = (3, 6). \end{aligned}$$

- (a) Characterise the set of Pareto-efficient allocations as completely as possible.
- (b) Characterise the core of this economy.
- (c) Find a Walrasian equilibrium and compute the WEA.
- (d) Verify that the WEA you found in part (c) is in the core.

Ejercicio A.2

(a) *Characterise the set of Pareto-efficient allocations as completely as possible.*

Solución:

Dado que las preferencias de ambos agentes son estrictamente convexas, podemos buscar el conjunto de Pareto planteando la tangencia de las curvas de indiferencia. Al igualar sus $TMS_{12}^i(\mathbf{x})$, todos los puntos representarán asignaciones sin posibilidad de mejora mutua.

- Recordando que $TMS_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}}$.

$$TMS_{12}^1(\mathbf{x}) = \frac{2(x_1^1 x_2^1)x_2^1}{2(x_1^1 x_2^1)x_1^1} = \frac{x_2^1}{x_1^1}$$

$$TMS_{12}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2} / \frac{2}{x_2^2} = \frac{x_2^2}{2x_1^2}$$

- Iguando $TMS_{12}^1(\mathbf{x}) = TMS_{12}^2(\mathbf{x})$

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{x_2^2}{2x_1^2}$$

Ejercicio A.2

- Planteo la condición de factibilidad para el bien 1 y despejo x_1^2

$$x_1^1 + x_1^2 = e_1^1 + e_1^2$$

$$x_1^2 = 21 - x_1^1$$

- Planteo la condición de factibilidad para el bien 2 y despejo x_2^2

$$x_2^1 + x_2^2 = e_2^1 + e_2^2$$

$$x_2^2 = 10 - x_2^1$$

- Remplazo x_1^2 y x_2^2 en $TMS_{12}^1(\mathbf{x}) = TMS_{12}^2(\mathbf{x})$

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{\overbrace{10 - x_2^1}^{x_2^2}}{\underbrace{2(21 - x_1^1)}_{x_1^2}} = \frac{10 - x_2^1}{42 - 2x_1^1}$$

Ejercicio A.2

- Busco despejar x_2^1

$$(42 - 2x_1^1)x_2^1 = (10 - x_2^1)x_1^1$$

$$42x_2^1 - 2x_1^1x_2^1 = 10x_1^1 - x_2^1x_1^1$$

$$42x_2^1 - x_1^1x_2^1 = 10x_1^1$$

$$x_2^1(42 - x_1^1) = 10x_1^1$$

- Por lo tanto, en cualquier asignación Pareto Eficiente debe cumplirse la siguiente relación:

$$x_2^1 = \frac{10x_1^1}{42 - x_1^1} \text{ con } 0 \leq x_1^1 \leq 21$$

- Las asignaciones para el agente 2 salen por diferencia respecto de las dotaciones totales de la economía.

Ejercicio A.2

(b) *Characterise the core of this economy.*

Solución:

- En esta economía el núcleo serán todas las asignaciones OP tales que ningún agente puede hacerlo mejor solo.
- Primero veamos cuales son los niveles de utilidad que pueden alcanzar con sus dotaciones iniciales.

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = (x_1^1 x_2^1)^2 \quad ; \quad u^1(e_1^1, e_2^1) = (18 \times 4)^2 = 5184$$

$$u^2(x_1^2, x_2^2) = \ln(x_1^2) + 2\ln(x_2^2) \quad ; \quad u^2(e_1^2, e_2^2) = \ln(3) + 2\ln(6) = 4,68$$

- El core de la economía es el set de todas las canastas OP (inciso anterior) que satisfacen la siguiente relación:

$$u^1(x_1^1, x_2^1) \geq u^1(e_1^1, e_2^1) = u^1(18, 4) = 5184$$

$$u^2(x_1^2, x_2^2) \geq u^2(e_1^2, e_2^2) = u^2(3, 6) = 4,68$$

Ejercicio A.2

(c) Find a Walrasian equilibrium and compute the WEA.

Solución:

- Resolvemos el problema del agente 1 en función de los precios:

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = (x_1^1 x_2^1)^2$$

$$TMS_{12}^1 = \frac{2(x_1^1 x_2^1)x_2^1}{2(x_1^1 x_2^1)x_1^1} = \frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2^1 = \frac{p_1}{p_2} x_1^1$$

$$p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 = e_1^1 p_1 + e_2^1 p_2 = 18p_1 + 4p_2$$

$$p_1 x_1^1 + p_2 \frac{p_1}{p_2} x_1^1 = 18p_1 + 4p_2$$

$$x_1^1 = \frac{18p_1 + 4p_2}{2p_1}$$

$$x_2^1 = \frac{18p_1 + 4p_2}{2p_2}$$

Ejercicio A.2

- Resolvemos el problema del agente 2 en función de los precios:

$$u^2(x_1^2, x_2^2) = \ln(x_1^2) + 2\ln(x_2^2)$$

$$TMS_{12}^2 = \frac{\frac{1}{x_1^2}}{\frac{2}{x_2^2}} = \frac{x_2^2}{2x_1^2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_2^2 = \frac{p_1}{p_2} 2x_1^2$$

$$p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = e_1^2 p_1 + e_2^2 p_2 = 3p_1 + 6p_2$$

$$p_1 x_1^2 + 2p_2 \frac{p_1}{p_2} x_1^2 = 3p_1 + 6p_2$$

$$x_1^2 = \frac{3p_1 + 6p_2}{3p_1}$$

$$x_2^2 = \frac{2(3p_1 + 6p_2)}{3p_2}$$

Ejercicio A.2

- Pasamos en limpio las demandas:

$$x_1^1 = \frac{18p_1 + 4p_2}{2p_1}$$

$$x_1^2 = \frac{3p_1 + 6p_2}{3p_1}$$

$$x_2^1 = \frac{18p_1 + 4p_2}{2p_2}$$

$$x_2^2 = \frac{2(3p_1 + 6p_2)}{3p_2}$$

Ejercicio A.2

- Planteamos condiciones de vaciado en el mercado 1:

$$\begin{aligned}x_1^1 + x_1^2 &= e_1^1 + e_1^2 \\ \frac{18p_1 + 4p_2}{2p_1} + \frac{3p_1 + 6p_2}{3p_1} &= 21 \\ 9 + 2\frac{p_2}{p_1} + 1 + 2\frac{p_2}{p_1} &= 21\end{aligned}$$

- El equilibrio Walrasiano se da con un vector de precios relativos tal que:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{11}{4}$$

o lo que es igual:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{11}$$

- La condición para vaciar el mercado del bien 2 es análoga. Verificar.

Ejercicio A.2

- Trabajamos con las demandas del agente 1 y remplazamos los precios relativos (sería más fácil tomando un numerario) para obtener sus WEA:

$$x_1^1 = \frac{18p_1 + 4p_2}{2p_1} = 9 + \frac{2p_2}{p_1} = 9 + \frac{11}{2} = \frac{29}{2} = 14,5$$

$$x_2^1 = \frac{18p_1 + 4p_2}{2p_2} = 2 + \frac{9p_1}{p_2} = 2 + \frac{36}{11} = \frac{58}{11} = 5,27$$

- Trabajamos con las demandas del agente 2 y remplazamos los precios relativos para obtener sus WEA:

$$x_1^2 = \frac{p_1 3 + p_2 6}{3p_1} = 1 + \frac{2p_2}{p_1} = 1 + \frac{22}{4} = \frac{13}{2} = 6,5$$

$$x_2^2 = \frac{2(p_1 3 + p_2 6)}{3p_2} = 4 + \frac{2p_1}{p_2} = 4 + \frac{8}{11} = \frac{52}{11} = 4,73$$

Ejercicio A.2

(d) *Verify that the WEA you found in part (c) is in the core.*

Solución:

- Debemos verificar que para las WEA se cumple que son OP y que generan un nivel de utilidad mayor o igual al de las dotaciones iniciales. Empezamos por verificar que sean OP con la siguiente condición:

$$x_2^1 = \frac{10x_1^1}{42 - x_1^1} \text{ con } 0 \leq x_1^1 \leq 21$$

- La asignación x_1^1 nos dio $x_1^1 = \frac{29}{2} = 14,5$ entonces se cumple $0 \leq x_1^1 \leq 21$ y si remplazamos en la expresión anterior:

$$\frac{10 \times 14,5}{42 - 14,5} = 5,27$$

- Que es lo que nos había dado la asignación x_2^1 de equilibrio.

Ejercicio A.2

- Pasando en limpio las asignaciones:

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1) = \left(\frac{29}{2}; \frac{58}{11}\right) = (14,5; 5,26)$$

$$x^2 = (x_1^2, x_2^2) = \left(\frac{13}{2}; \frac{52}{11}\right) = (6,5; 4,73)$$

- Verificamos si en las WEA los agentes están al menos tan bien como en $\mathbf{e}$:

$$u^1\left(\frac{29}{2}; \frac{58}{11}\right) = 5839,25 \geq u^1(e_1^1, e_2^1) = u^1(18; 4) = 5184$$

$$u^2\left(\frac{13}{2}; \frac{52}{11}\right) = 4,94 \geq u^2(e_1^2, e_2^2) = u^2(3; 6) = 4,68$$

- Por lo tanto las WEA pertenecen al core de la economía. Recordemos que tienen que ser factibles, pero eso lo impusimos en la resolución del equilibrio.

Ejercicio A.3

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 . Las preferencias de los agentes son representadas por:

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = \left(\frac{3}{5}\right) \ln(x_1^1) + \left(\frac{2}{5}\right) \ln(x_2^1),$$
$$u^2(x_1^2, x_2^2) = \min(4x_1^2, 2x_2^2),$$

y las dotaciones iniciales están dadas por $\mathbf{e}^1 = (5; 0)$ y $\mathbf{e}^2 = (0; 4)$.

- (a) ¿Se cumplen las condiciones suficientes de existencia de equilibrio Walrasiano en esta economía? Enúncielas. Si no se cumplieran, ¿significa esto que no hay equilibrio competitivo?
- (b) Determine, si existe, el equilibrio competitivo en esta economía.

Ejercicio A.3

(a) *¿Se cumplen las condiciones suficientes de existencia de equilibrio Walrasiano en esta economía? Enúncielas. Si no se cumplieran, ¿significa esto que no hay equilibrio competitivo?*

- **Existencia del equilibrio walrasiano:** Si cada función de utilidad del consumidor satisface el supuesto 5.1, y $\sum_{i=1}^I \mathbf{e}^i \gg 0$ entonces existe al menos un vector de precios $\mathbf{p}^* \gg 0$, tal que $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$.
- **Supuesto 5.1:** La utilidad u^i es continua, fuertemente creciente y estrictamente cuasicóncava en $\mathbb{R}_+^n$.

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = \left(\frac{3}{5}\right) \ln(x_1^1) + \left(\frac{2}{5}\right) \ln(x_2^1),$$
$$u^2(x_1^2, x_2^2) = \min(4x_1^2, 2x_2^2),$$

Ejercicio A.3

- **Dotaciones:** Todas las dotaciones en la economía son positivas.
- **Fuertemente creciente:** La función de utilidad del agente 2 no es fuertemente creciente. Su utilidad no se ve afectada, por ejemplo, pasando de una canasta $(1;1)$ a $(2;1)$.
- **Cuasi-concavidad estricta:** La función de utilidad del agente 1 es una transformación monótona de una Cobb-Douglas, que no es estrictamente cóncava sobre los ejes.
- Las condiciones mencionadas son suficientes, no necesarias. Esta economía podría presentar uno o varios equilibrios walrasianos.

Ejercicio A.3

(b) Determine, si existe, el equilibrio competitivo en esta economía.

Solución:

- Planteamos las funciones de demanda y luego reemplazando por los valores de las dotaciones:

$$x_1^1 = \frac{3}{5} \frac{p_1 e_1^1 + p_2 e_2^1}{p_1}$$

$$x_2^1 = \frac{2}{5} \frac{p_1 e_1^1 + p_2 e_2^1}{p_2}$$

$$x_1^2 = \frac{p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2}{p_1 + 2p_2}$$

$$x_2^2 = \frac{2(p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2)}{p_1 + 2p_2}$$

$$x_1^1 = \frac{3}{5} \frac{p_1 5 + 0p_2}{p_1} = 3$$

$$x_2^1 = \frac{2}{5} \frac{5p_1 + 0p_2}{p_2} = 2 \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_1^2 = \frac{0p_1 + 4p_2}{p_1 + 2p_2} = \frac{4p_2}{p_1 + 2p_2}$$

$$x_2^2 = 2 \frac{0p_1 + 4p_2}{p_1 + 2p_2} = \frac{8p_2}{p_1 + 2p_2}$$

Ejercicio A.3

- Planteamos la condición de vaciado del mercado 1:

$$x_1^1 + x_1^2 = \mathbf{e}_1$$

$$3 + \frac{4p_2}{p_1 + 2p_2} = 5$$

$$4p_2 = 2p_1 + 4p_2$$

- La condición implica que $p_1 = 0$.
- Dado el equilibrio walrasino $p_1 = 0$, con las dotaciones iniciales $\mathbf{e}$, las WEA para los agentes 1 y 2 son:

$$x_1^1 = 3 \quad x_2^1 = 0 \quad x_1^2 = 2 \quad x_2^2 = 4$$

Ejercicio A.3

- Se cancela p_2 , que puede tomar cualquier valor positivo (en términos relativos siempre va a ser mayor que 0).
- El agente 2 no demanda más del bien 1 a pesar de que su precio sea 0, porque no le trae utilidad.
- Además dado que $p_1 = 0$, el agente 1 solo puede demandar bienes cuyo precio es 0, porque no posee renta.
- El agente 1 le cede unidades del bien 1 al agente 2 porque no le reportan utilidad.

Ejercicio A.4

Consigna (Ejercicio 5.19 de J&R):

An exchange economy has three consumers and three goods. Consumer's utility functions and initial endowments are as follows:

$$u^1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \min(x_1^1, x_2^1) \quad \mathbf{e}^1 = (1, 0, 0),$$

$$u^2(x_1^2, x_2^2, x_3^2) = \min(x_2^2, x_3^2) \quad \mathbf{e}^2 = (0, 1, 0),$$

$$u^3(x_1^3, x_2^3, x_3^3) = \min(x_1^3, x_3^3) \quad \mathbf{e}^3 = (0, 0, 1).$$

- (a) Find a Walrasian equilibrium.
- (b) Compute the WEA.

Ejercicio A.4

(a) Find a Walrasian equilibrium.

Solución:

- Las demandas marshaillianas para el agente 1 son:

$$x_1^1 = \frac{1p_1}{p_1 + p_2} \quad x_2^1 = \frac{1p_1}{p_1 + p_2} \quad x_3^1 = 0$$

- Para el agente 2:

$$x_1^2 = 0 \quad x_2^2 = \frac{1p_2}{p_2 + p_3} \quad x_3^2 = \frac{1p_2}{p_2 + p_3}$$

- Para el agente 3:

$$x_1^3 = \frac{1p_3}{p_1 + p_3} \quad x_2^3 = 0 \quad x_3^3 = \frac{1p_3}{p_1 + p_3}$$

Ejercicio A.4

- Planteamos las condiciones de vaciado para el mercado 1:

$$x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 = e_1^1 + e_1^2 + e_1^3$$

$$\frac{1p_1}{p_1 + p_2} + 0 + \frac{1p_3}{p_1 + p_3} = 1 + 0 + 0$$

$$\frac{1p_1}{p_1 + p_2} + \frac{1p_3}{p_1 + p_3} = 1$$

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2} = 1 - \frac{p_3}{p_1 + p_3}$$

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2} = \frac{p_1}{p_1 + p_3}$$

$$p_2 = p_3$$

Ejercicio A.4

- Planteamos las condiciones de vaciado para el mercado 3:

$$x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 = e_3^1 + e_3^2 + e_3^3$$

$$0 + \frac{1p_2}{p_2 + p_3} + \frac{1p_3}{p_1 + p_3} = 0 + 0 + 1$$

$$\frac{1p_2}{p_2 + p_3} + \frac{1p_3}{p_1 + p_3} = 1$$

$$\frac{p_2}{p_1 + p_3} = 1 - \frac{p_3}{p_1 + p_3}$$

$$\frac{p_2}{p_1 + p_3} = \frac{p_1}{p_1 + p_3}$$

$$p_2 = p_1$$

Ejercicio A.4

- Con el vaciado de los 2 mercados anteriores ya podemos despejar la relación $p_1 = p_2 = p_3$. De hecho, por corolario de la Ley de Walras, sabemos que si $N - 1$ mercados están en equilibrio el restante también lo estará.
- Verifiquen que las condiciones de vaciado para el mercado 2 también se cumplen:

$$x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 = e_2^1 + e_2^2 + e_2^3$$
$$\frac{1p_1}{p_1 + p_2} + \frac{1p_2}{p_2 + p_3} + 0 = 0 + 1 + 0$$

- El equilibrio walrasiano es cualquier vector de precios que cumpla con la siguiente relación:

$$p_1 = p_2 = p_3$$

Ejercicio A.4

(b) Compute the WEA.

Solución:

- Dado el equilibrio walrasino, con las dotaciones iniciales $\mathbf{e}$, las asignaciones de equilibrio walrasino para el agente 1 son:

$$x_1^1 = \frac{1p_1}{p_1 + p_2} = \frac{1}{2} \quad x_2^1 = \frac{1p_1}{p_1 + p_2} = \frac{1}{2} \quad x_3^1 = 0$$

- Para el agente 2:

$$x_1^2 = 0 \quad x_2^2 = \frac{1p_2}{p_2 + p_3} = \frac{1}{2} \quad x_3^2 = \frac{1p_2}{p_2 + p_3} = \frac{1}{2}$$

- Para el agente 3:

$$x_1^3 = \frac{1p_3}{p_1 + p_3} = \frac{1}{2} \quad x_2^3 = 0 \quad x_3^3 = \frac{1p_3}{p_1 + p_3} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio A.5

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 . Suponga $TMS_{12}^1 = \frac{x_2^1}{x_1^1}$; y $TMS_{12}^2 = \frac{x_2^2}{x_1^2}$. Las dotaciones son $\mathbf{e}^1 = (10; 100)$ y $\mathbf{e}^2 = (50; 20)$. El bien 2 será el numerario (i.e. $p_2 = 1$). Compruebe que el equilibrio competitivo es con $p_1^* = 2$.

Ejercicio A.5

- Debido a la forma que tienen las TMS, ¿podemos deducir que las funciones de utilidad de los consumidores representan preferencias Cobb-Douglas?
 - Si bien esas TMS corresponden a una función de utilidad con preferencias Cobb-Douglas, también podrían corresponder a otro tipo de función de utilidad que desconocemos.
 - Por lo tanto, no podremos utilizar las funciones de demanda marshalliana de la función Cobb-Douglas para resolver este ejercicio.
- Igualamos la TMS del consumidor 1 a la relación de precios. Incorporando $p_2 = 1$:

$$TMS_{12}^1 = \frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \rightarrow \quad x_2^1 = p_1 x_1^1$$

- Reemplazo en la restricción presupuestaria:

$$p_1 x_1^1 + p_2 p_1 x_1^1 = p_1 e_1^1 + p_2 e_2^1$$

$$2p_1 x_1^1 = 10p_1 + 100$$

$$x_1^1 = 5 + \frac{50}{p_1}$$

$$x_2^1 = 5p_1 + 50$$

Ejercicio A.5

- Hago lo mismo para el consumidor 2, igualo su TMS a la relación de precios. Incorporando $p_2 = 1$:

$$TMS_{12}^2 = \frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \rightarrow \quad x_2^2 = p_1 x_1^2$$

- Reemplazo en la restricción presupuestaria:

$$p_1 x_1^2 + p_2 p_1 x_1^2 = p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2$$

$$2p_1 x_1^2 = 50p_1 + 20$$

$$x_1^2 = 25 + \frac{10}{p_1}$$

$$x_2^2 = 25p_1 + 10$$

Ejercicio A.5

- Planteamos la condición de vaciado del mercado del bien 2:

$$5p_1 + 50 + 25p_1 + 10 = 100 + 20$$

$$30p_1 = 60$$

$$p_1^* = 2$$

- Queda comprobado que, tomando el bien 2 como numerario, el precio de equilibrio del bien 1 es igual a 2, dadas las tasas marginales de sustitución y las dotaciones iniciales.

Ejercicio A.6

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 donde:

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = x_2^1,$$

$$u^2(x_1^2, x_2^2) = x_1^2,$$

y las dotaciones iniciales están dadas por $\mathbf{e}^1 = (10; 0)$ y $\mathbf{e}^2 = (0; 10)$.

- (a) Hallar la curva de oferta-precio de los agentes cuando los precios son estrictamente positivos.
- (b) Hallar la curva de oferta-precio del agente 1 cuando $p_1 = 0$ y la curva de oferta-precio del agente 2 cuando $p_2 = 0$.
- (c) Hallar la curva de oferta-precio de los agentes cuando los precios son no negativos.
- (d) Hallar las WEAs de la economía utilizando las curvas de oferta precio.
- (e) Calcule el último resultado algebraicamente.

Reminder: curvas oferta-precio

- Ante un cambio de precios relativos, la recta presupuestaria cambia de pendiente, pivotando sobre el punto de las dotaciones iniciales. Los agentes, para cada recta presupuestaria, elegirían alguna canasta óptima.
- Las curvas oferta-precio nos muestran, para cada agente, su canasta óptima ante distintos precios relativos.
- Si dentro de la caja las curvas de los agentes se superponen, en esos puntos las canastas son factibles y simultáneamente óptimas para cada uno de ellos dado el mismo vector de precios.
- Notar que de encontrar las asignaciones que cumplan con estas condiciones, habremos encontrado las WEAs de la economía, cada una asociada al vector de precios que es el equilibrio walrasiano.

Ejercicio A.6

(a) Hallar la curva de oferta-precio de los agentes cuando los precios son estrictamente positivos.

- La curva de oferta-precio representa las canastas que se demandarían a los diferentes vectores de precios.
- Primero buscaremos la curva del agente 1, cuya función de utilidad es $u^1(x_1^1, x_2^1) = x_2^1$

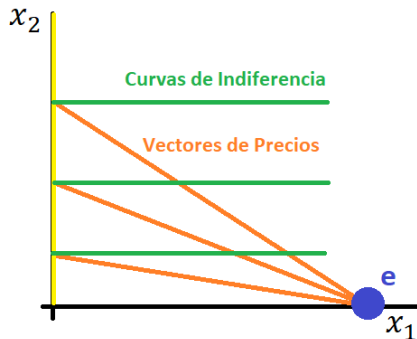


Figura 1: Curva oferta-precio del consumidor 1 con precios estrictamente positivos.

Ejercicio A.6

- Ahora buscaremos la curva del agente 2, cuya función de utilidad es $u^2(x_1^2, x_2^2) = x_1^2$

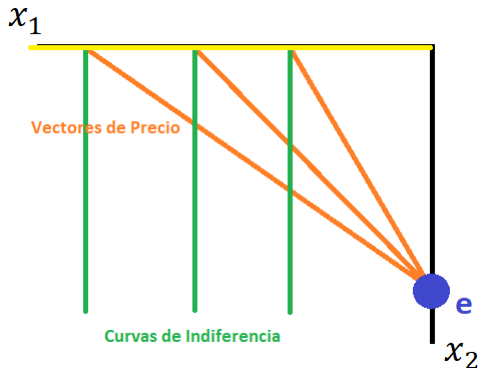


Figura 2: Curva oferta-precio del consumidor 2 con precios estrictamente positivos.

Ejercicio A.6

(b) Hallar la curva de oferta-precio del agente 1 cuando $p_1 = 0$ y la curva de oferta-precio del agente 2 cuando $p_2 = 0$.

- Cuando $p_1 = 0$ el agente 1 no tiene poder adquisitivo por lo que únicamente puede comprar bienes del tipo 1, el cual no le genera utilidad, por lo tanto, la curva de indiferencia donde maximiza su utilidad es aquella donde la utilidad es nula. Al superponerse con su recta presupuestaria, todas estas canasta maximizan su utilidad.

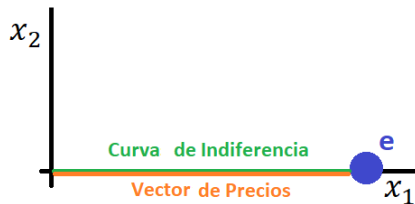


Figura 3: Curva oferta-precio del consumidor 1 para $p_1 = 0$.

Ejercicio A.6

- Análogamente, cuando $p_2 = 0$ el agente 2 no tiene poder adquisitivo por lo que únicamente puede comprar bienes del tipo 2, el cual no le genera utilidad, por lo tanto, la curva de indiferencia donde maximiza su utilidad es aquella donde la utilidad es nula. Al superponerse con su recta presupuestaria, todas estas canasta maximizan su utilidad.

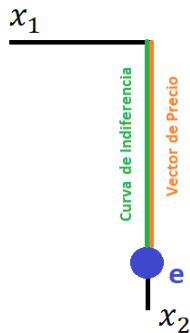


Figura 4: Curva oferta-precio del consumidor 2 para $p_2 = 0$.

Ejercicio A.6

(c) Hallar la curva de oferta-precio de los agentes cuando los precios son no negativos.

- Unimos la curva de oferta precio que hallamos para el agente 1 en el inciso (a) y (b).

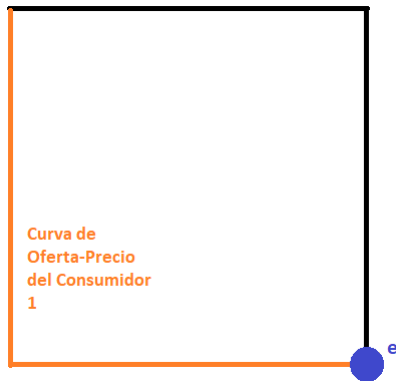


Figura 5: Curva oferta-precio del agente 1 y dotación inicial.

Ejercicio A.6

- Unimos la curva de oferta precio que hallamos para el agente 2 en el inciso (a) y (b).

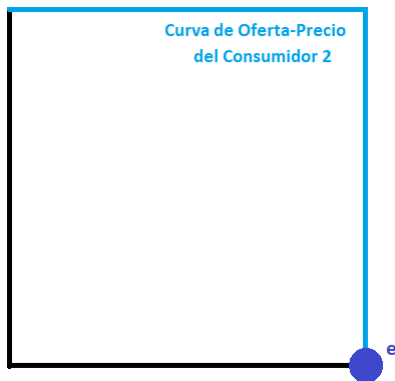


Figura 6: Curva oferta-precio del agente 2 y dotación inicial.

Ejercicio A.6

(d) Hallar las WEA de la economía utilizando las curvas de oferta precio.

- Superponemos las curvas de oferta-precio de los consumidores buscando una intersección.

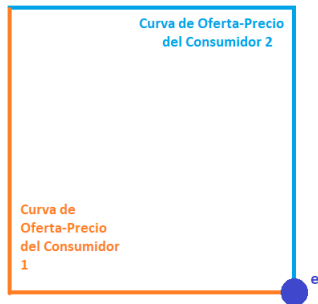


Figura 7: Curvas oferta-precio y dotación inicial.

- La WEA es la asignación:

$$(x_1^1; x_2^1) = (0; 10) \quad (x_1^2; x_2^2) = (10; 0)$$

Ejercicio A.6

(e) Calcule el último resultado algebraicamente.

- Calculamos las demandas marshallianas, notando que cada agente consumirá sólo el bien que le genera utilidad.

$$x_1^1 = 0$$

$$x_2^1 = \frac{y}{p_2} = \frac{10p_1}{p_2}$$

$$x_1^2 = \frac{y}{p_1} = \frac{10p_2}{p_1}$$

$$x_2^2 = 0$$

- Aplicamos la condición de vaciado del mercado del bien 1 y buscamos el equilibrio walrasiano:

$$0 + \frac{10p_2}{p_1} = 10 \quad 1 \rightarrow \quad p_1 = p_2$$

- La asignación de equilibrio walrasiano es:

$$x_1^1 = 0 \quad x_2^1 = 10 \quad x_1^2 = 10 \quad x_2^2 = 0$$

Ejercicio A.7

Consigna:

Suponga una economía de intercambio puro con preferencias de tipo Cobb-Douglas, 2 agentes, 2 bienes, $\alpha = \beta = 0,5$, y dotaciones $\mathbf{e}^1 = (3; 2)$, $\mathbf{e}^2 = (2; 3)$. Sabiendo que si se toma el bien 1 como numerario el precio del bien 2 viene dado por:

$$p_2 = \frac{\mathbf{e}_1^1(1 - \alpha) + \mathbf{e}_1^2(1 - \beta)}{\mathbf{e}_2^1\alpha + \mathbf{e}_2^2\beta}$$

Halle el equilibrio competitivo y sus WEA y luego analice como se altera este resultado si:

- (a) Se reemplaza la dotación del agente 2 por $(3; 2)$. Interprete.
- (b) Se reemplaza la dotación del agente 2 por $(1; 2)$. Interprete.
- (c) Se reemplaza el valor de los parámetros α y β por $\frac{2}{3}$. Interprete.
- (d) Solo se reemplaza el valor del parámetro β por $\frac{2}{3}$. Interprete

Ejercicio A.7

- Estas son las funciones de utilidad de ambos agentes y las demandas marshallianas para ambos bienes que surgen de ellas:

$$u^1(x_1^1; x_2^1) = (x_1^1)^\alpha (x_2^1)^{1-\alpha}$$

$$u^2(x_1^2; x_2^2) = (x_1^2)^\beta (x_2^2)^{1-\beta}$$

$$x_1^1 = \alpha \frac{p_1 \mathbf{e}_1^1 + p_2 \mathbf{e}_2^1}{p_1}$$

$$x_2^1 = (1 - \alpha) \frac{p_1 \mathbf{e}_1^1 + p_2 \mathbf{e}_2^1}{p_2}$$

$$x_1^2 = \beta \frac{p_1 \mathbf{e}_1^2 + p_2 \mathbf{e}_2^2}{p_1}$$

$$x_2^2 = (1 - \beta) \frac{p_1 \mathbf{e}_1^2 + p_2 \mathbf{e}_2^2}{p_2}$$

Ejercicio A.7

Halle el equilibrio competitivo.

$$p_2 = \frac{\mathbf{e}_1^1(1 - \alpha) + \mathbf{e}_1^2(1 - \beta)}{\mathbf{e}_2^1\alpha + \mathbf{e}_2^2\beta} = \frac{3(1 - 0,5) + 2(1 - 0,5)}{2 \times 0,5 + 3 \times 0,5} = 1$$

- El equilibrio competitivo es:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{1}$$

- Las WEAs son:

$$x_1^1 = 2,5 \quad x_2^1 = 2,5 \quad x_1^2 = 2,5 \quad x_2^2 = 2,5$$

- Podríamos haber intuido este resultando observando que la caja es cuadrada y que ambos individuos valoran ambos bienes de la misma forma.

Ejercicio A.7

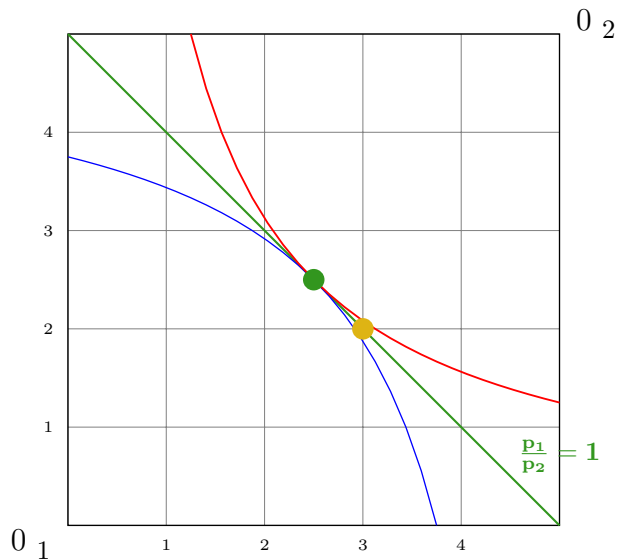


Figura 8: Curvas de indiferencia, vector de precios, dotaciones (amarillo) y WEA (verde)

Ejercicio A.7

(a) Se reemplaza la dotación del agente 2 por $(3; 2)$.

$$p_2 = \frac{3(1 - 0,5) + 3(1 - 0,5)}{2 \times 0,5 + 2 \times 0,5} = \frac{3}{2}$$

- El equilibrio competitivo es:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3}$$

- Las WEAs son:

$$x_1^1 = 3 \quad x_2^1 = 2 \quad x_1^2 = 3 \quad x_2^2 = 2$$

- A pesar que las valoraciones de los individuos se mantuvieron iguales, la caja dejó de ser cuadrada, el bien 2, debido a que es más escaso, tiene un precio mayor que el bien 1. La asignación de equilibrio es la dotación inicial.

Ejercicio A.7

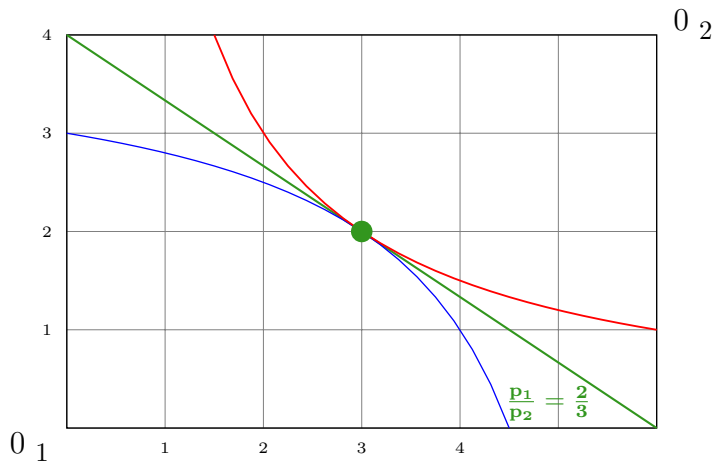


Figura 9: Curvas de indiferencia, vector de precios, dotaciones y WEA (verde)

Ejercicio A.7

(b) Se reemplaza la dotación del agente 2 por $(1; 2)$.

$$p_2 = \frac{3(1 - 0,5) + 1(1 - 0,5)}{2 \times 0,5 + 2 \times 0,5} = 1$$

- El equilibrio competitivo es:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{1}$$

- Las WEAs son:

$$x_1^1 = 2,5 \quad x_2^1 = 2,5 \quad x_1^2 = 1,5 \quad x_2^2 = 1,5$$

- Las valoraciones de los individuos se mantuvieron iguales y la caja volvió a ser cuadrada, ambos bienes tienen el mismo precio. Sin embargo, debido a sus dotaciones iniciales, el poder adquisitivo del consumidor 1 es mayor al del 2, demandando mayores unidades.

Ejercicio A.7

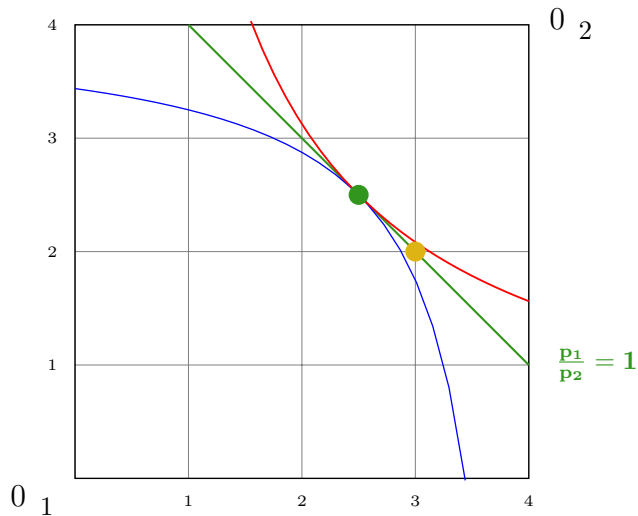


Figura 10: Curvas de indiferencia, vector de precios, dotaciones (amarillo) y WEA (verde)

Ejercicio A.7

(c) Se reemplaza el valor de los parámetros α y β por $\frac{2}{3}$.

$$p_2 = \frac{3(1 - \frac{2}{3}) + 2(1 - \frac{2}{3})}{2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{2}{3}} = 0,5$$

- El equilibrio competitivo es:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{1}$$

- Las WEAs son:

$$x_1^1 = 2,66 \quad x_2^1 = 2,66 \quad x_1^2 = 2,33 \quad x_2^2 = 2,33$$

- Ambos consumidores valoran más el bien 1 por lo que este tiene un precio mayor. El consumidor 1, que posee más unidades, es más rico por lo que demanda mayores cantidades totales de ambos bienes.

Ejercicio A.7

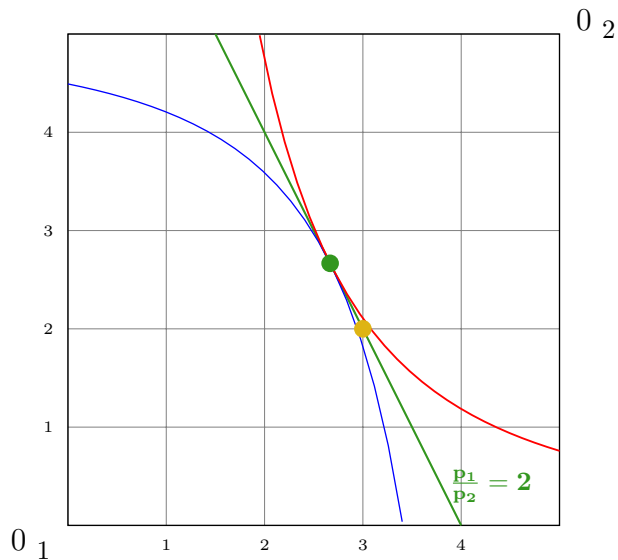


Figura 11: Curvas de indiferencia, vector de precios, dotaciones (amarillo) y WEA (verde)

Ejercicio A.7

(d) Solo se reemplaza el valor del parámetro β por $\frac{2}{3}$.

$$p_2 = \frac{3(1 - 0,5) + 2(1 - \frac{2}{3})}{2 \times 0,5 + 3 \times \frac{2}{3}} = \frac{13}{18}$$

- El equilibrio competitivo es:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{18}{13}$$

- Las WEAs son:

$$x_1^1 = \frac{20}{9} \quad x_2^1 = \frac{40}{13} \quad x_1^2 = \frac{25}{9} \quad x_2^2 = \frac{25}{13}$$

- Esta situación se puede pensar como un caso más moderado del inciso anterior. La mayor valoración del agente 2 por el bien 1 presiona a la baja de p_2 , encareciendo relativamente el bien 1. Esta caída de p_2 es más suave que la del caso anterior, ya que allí ambos agentes tenían una preferencia relativa mayor por el bien 1. Aquí el agente 1 será más rico (ya que posee más cantidades del bien más caro).

Ejercicio A.7

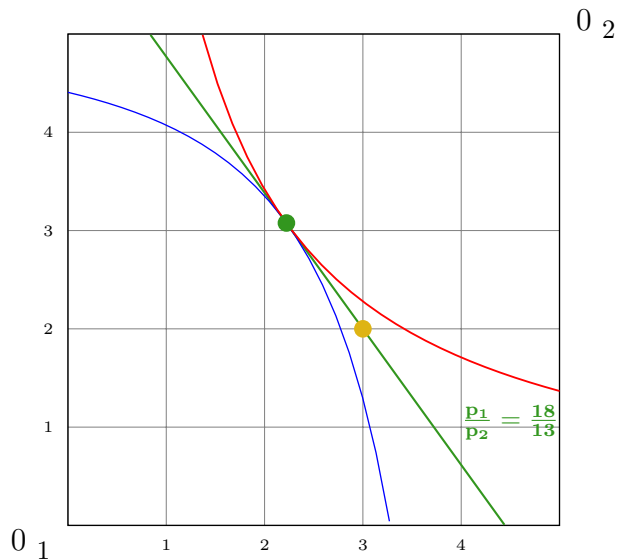


Figura 12: Curvas de indiferencia, vector de precios, dotaciones (amarillo) y WEA (verde)

Ejercicio A.8

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes. El consumidor 1, cuyas preferencias están representadas por la siguiente función de utilidad:

$$u^1(x_1^1; x_2^1) = x_1^1 x_2^1 \quad \mathbf{e}^1 = (3; 2)$$

y el consumidor B cuyas preferencias están representada por la siguiente función de utilidad:

$$u^2(x_1^2; x_2^2) = x_1^2 + (x_2^2)^{1/2} \quad \mathbf{e}^2 = (2; 3)$$

- (a) ¿Se cumplen las condiciones suficientes de existencia de equilibrio competitivo en esta economía?
- (b) Determine, si existe, el equilibrio competitivo en esta economía.

Ejercicio A.8

(a) *¿Se cumplen las condiciones suficientes de existencia de equilibrio competitivo en esta economía?*

Teorema 5.5 Existencia de Equilibrio Walrasiano.

If each consumer's utility function satisfies Assumption 5.1, and $\sum_{i=1}^I \mathbf{e}^i \gg 0$, then there exists at least one price vector, $\mathbf{p}^* \gg 0$, such that $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$.

Supuesto 5.1 (Utilidad del Consumidor).

Utility u^i is continuous, strongly increasing, and strictly quasiconcave on $\mathbb{R}_+^n$.

- Las dotaciones totales de esta economía son positivas en todos los mercados. Sin embargo, la función de utilidad del consumidor 1 no cumple con el Supuesto 5.1. Por lo tanto, no se cumplen las condiciones suficientes de Existencia de Equilibrio Walrasiano.

Ejercicio A.8

(b) *Determine, si existe, el equilibrio competitivo en esta economía.*

- Por propiedad de preferencias Cobb-Douglas, las demandas marshallianas del consumidor 1 son:

$$x_1^1 = 0,5 \frac{3p_1 + 2p_2}{p_1} = 1,5 + \frac{p_2}{p_1}$$

$$x_2^1 = 0,5 \frac{3p_1 + 2p_2}{p_2} = 1,5 \frac{p_1}{p_2} + 1$$

- Asumiendo que existe una asignación de equilibrio en el interior que se da con tangencia de las curvas de indiferencia, planteamos la igualación entre la TMS del consumidor 2 y la relación de precios:

$$TMS_{12}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\frac{1}{2}(x_2^2)^{-1/2}} = 2(x_2^2)^{1/2}$$

$$2(x_2^2)^{1/2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \rightarrow \quad x_2^2 = \left(\frac{p_1}{2p_2} \right)^2$$

Ejercicio A.8

- Reemplazo en la restricción presupuestaria del agente 2 para buscar la demanda marshalliana del bien 1:

$$p_1 x_1^2 + p_2 \left(\frac{p_1}{2p_2} \right)^2 = p_1 e_1^2 + p_2 e_2^2$$

- Reemplazo las dotaciones y despejo:

$$p_1 x_1^2 + \frac{p_1^2}{4p_2} = 2p_1 + 3p_2$$

$$x_1^2 = \left(2p_1 + 3p_2 - \frac{p_1^2}{4p_2} \right) \frac{1}{p_1}$$

$$x_1^2 = 2 + 3\frac{p_2}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}$$

Ejercicio A.8

- Resumiendo, las demandas marshallianas de los agentes son:

$$x_1^1 = 1,5 + \frac{p_2}{p_1}$$

$$x_2^1 = 1,5 \frac{p_1}{p_2} + 1$$

$$x_1^2 = 2 + 3 \frac{p_2}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}$$

$$x_2^2 = \left(\frac{p_1}{2p_2} \right)^2$$

- Importante:** para que la demanda del bien 1 del consumidor 2 no sea menor a 0 (asumimos solución interior), se tiene que cumplir que $-1,29 < \frac{p_1}{p_2} < 9,29$. Bajo la ausencia de males, podemos refinar esta condición con la no-negatividad de los precios, resultando en $0 < \frac{p_1}{p_2} < 9,29$.

Ejercicio A.8

- Planteo la condición de vaciado para el mercado del bien 1:

$$1,5 + \frac{p_2}{p_1} + 2 + 3\frac{p_2}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2} = 2 + 3$$

$$4\frac{p_2}{p_1} = 1,5 + \frac{p_1}{4p_2}$$

$$4 = \frac{1}{4} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 + 1,5 \frac{p_1}{p_2}$$

$$0 = \frac{1}{4} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 + 1,5 \frac{p_1}{p_2} - 4$$

$$\left(\frac{p_1}{p_2} \right)_1 = 2$$

$$\left(\frac{p_1}{p_2} \right)_2 = -8$$

Ejercicio A.8

- La primera opción de equilibrio walrasiano cumple con la condición de solución interior. Ambos bienes generan un aumento de la utilidad de los consumidores, por lo tanto, no tendría sentido económico que el precio de alguno de ellos fuera menor a 0, por lo tanto, el vector de precios de equilibrio es:

$$\frac{p_1}{p_2} = 2$$

- Asumiendo $p_2 = 1$, $p_1^* = 2$, las demandas marshallianas de los consumidores son:

$$x_1^1 = 2$$

$$x_2^1 = 4$$

$$x_1^2 = 3$$

$$x_2^2 = 1$$

Ejercicio A.9

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 . Las preferencias de los agentes son representadas por:

$$\begin{aligned}u^1(x_1^1, x_2^1) &= x_1^1 + \ln(x_2^1), \\u^2(x_1^2, x_2^2) &= \min(x_1^2, x_2^2),\end{aligned}$$

y las dotaciones iniciales están dadas por $\mathbf{e}^1 = (3; 0)$ y $\mathbf{e}^2 = (0; 3)$.

- (a) Halle todas las asignaciones óptimas de Pareto en esta economía.
- (b) Halle todos los equilibrios Walrasianos.

Ejercicio A.9

(a) Halle todas las asignaciones óptimas de Pareto en esta economía.

Solución:

- Si hay puntos donde las curvas de indiferencia se tocan pero no se cortan, son óptimos de Pareto.
- En este caso particular, todos los puntos donde sucede esto, con $\mathbf{p} \gg 0$, son las esquinas de las curvas de indiferencia el agente 2 con preferencias Leontief.
- Por lo tanto, siempre que $x_1^2 = x_2^2$ y las asignaciones sean factibles ($x_1^1 + x_1^2 = 3$ y $x_2^1 + x_2^2 = 3$) estaremos en una asignación OP, i.e. sobre la curva de contrato.

Ejercicio A.9

(b) Halle todos los equilibrios Walrasianos.

- Las preferencias del agente 1 son del tipo cuasilineal. Resolvemos su problema:

$$TMS_{12}^1 = \frac{1}{\frac{1}{x_2^1}} = x_2^1 = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 = e_1^1 p_1 + e_2^1 p_2$$

$$p_1 x_1^1 + p_1 = 3p_1 + 0p_2$$

$$x_1^1 = 2$$

Ejercicio A.9

- Las preferencias del agente 2 son del tipo complementarios perfectos, resolvemos su problema:

$$x_1^2 = x_2^2 = \frac{e_1^2 p_1 + e_2^2 p_2}{p_1 + p_2} = \frac{0p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2} = \frac{3p_2}{p_1 + p_2}$$

- Planteamos la condición de vaciado para el mercado 1:

$$\begin{aligned}x_1^1 + x_1^2 &= e_1^1 + e_1^2 \\2 + \frac{3p_2}{p_1 + p_2} &= 3 \\2p_2 &= p_1\end{aligned}$$

- Entonces el equilibrio Walrasiano está dado por los precios relativos:

$$\frac{p_1}{p_2} = 2$$

- Aunque la consigna no lo solicita, las WEA son:

$$\begin{aligned}x_1^1 &= 2 & x_1^2 &= 1 \\x_2^1 &= 2 & x_2^2 &= 1\end{aligned}$$

Ejercicio A.10

Consigna (Ejercicio 5.14 (a) de J&R):

Suppose that each consumer i has a strictly positive endowment vector, $\mathbf{e}^i$, and a Cobb-Douglas utility function on $\mathbb{R}_+^n$ of the form $u^i(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1^i} x_2^{\alpha_2^i} \dots x_n^{\alpha_n^i}$, where $\alpha_k^i > 0$ for all consumers i , and goods k , and $\sum_{k=1}^n \alpha_k^i = 1$ for all i .

- (a) Show that no consumer's utility function is strongly increasing on $\mathbb{R}_+^n$, so that one cannot apply Theorem 5.5 to conclude that this economy possesses a Walrasian equilibrium.

Ejercicio A.10

(a) Show that no consumer's utility function is strongly increasing on $\mathbb{R}_+^n$, so that one cannot apply Theorem 5.5 to conclude that this economy possesses a Walrasian equilibrium.

Solución:

$$u^i(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1^i} x_2^{\alpha_2^i} \dots x_n^{\alpha_n^i}$$

- Recordar que: la propiedad de monotonidad fuerte en las preferencias implica que agregar uno o más elementos genera que el valor que toma la función que las representa aumente.
- Planteamos la derivada de la función de utilidad para un bien j :

$$\frac{\partial u^i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \alpha_j^i x_j^{\alpha_j^i - 1} \prod_{n \neq j} x_n^{\alpha_n^i}$$

- ¿Son las mismas positivas en $\mathbb{R}_+^n$?

Ejercicio A.10

(a) Show that no consumer's utility function is strongly increasing on $\mathbb{R}_+^n$, so that one cannot apply Theorem 5.5 to conclude that this economy possesses a Walrasian equilibrium.

$$\frac{\partial u^i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \alpha_j^i x_j^{\alpha_j^i - 1} \prod_{n \neq j} x_n^{\alpha_n^i}$$

- Notemos que cuando se evalúa para canastas con cantidades nulas de alguno de los bienes (sea el bien j -ésimo o alguno de los otros), el valor de la derivada es nulo.
- Entonces, existen canastas en $\mathbb{R}_+^n$ para las que el aumento de alguno de los bienes no reporta un aumento de la utilidad. Entonces, la función no es fuertemente creciente en $\mathbb{R}_+^n$.