

Práctica II GE: Eficiencia

Microeconomía II - Curso: Paulo Pascuini

Santiago Rodríguez Vázquez, Francisco Alonso Belgrano¹

Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

Abril 2025

¹Esta presentación se hizo con colaboración de Paulo Pascuini, Juana Fernández Zabala, Julián Arias, Dante Engrassia, Sofía Martín y Guido Schiavi.

Recordemos algunas definiciones

- **Pareto-Efficient Allocations:** A feasible allocation $\mathbf{x} \in F(\mathbf{e})$ is pareto efficient if there is no other feasible allocation, $\mathbf{y} \in F(\mathbf{e})$, such that $\mathbf{y}^i \succsim^i \mathbf{x}^i$ for all consumers, i , with at least one preference strict.
- **The Core of an Exchange Economy:** The core of an exchange economy with endowment $\mathbf{e}$, denoted $C(\mathbf{e})$, is the set of all unblocked feasible allocations.
- **Walrasian Equilibrium:** A vector $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_{++}^n$ is called a Walrasian equilibrium if $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.
- **Walrasian Equilibrium Allocations:** Let $\mathbf{p}^*$ be a Walrasian equilibrium for some economy with initial endowments $\mathbf{e}$, and let

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) = (\mathbf{x}^1(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \mathbf{e}^1), \dots, \mathbf{x}^I(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \mathbf{e}^I))$$

where component i gives the n -vector of goods demanded and received by consumer i at $\mathbf{p}^*$. Then $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ is called a Walrasian equilibrium allocation, or WEA.

Ejercicio A.1

Consigna:

- Consideremos una economía de 2×2 . Las funciones de utilidad y las dotaciones son:

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 x_2^1 \text{ con } \mathbf{e}^1 = (10, 5)$$

$$u^2(x_1^2, x_2^2) = x_1^2 x_2^2 \text{ con } \mathbf{e}^2 = (5, 10)$$

- (a) Halle todas las asignaciones óptimas de Pareto en esta economía.
- (b) Caracterice el núcleo de esta economía.
- (c) Encuentre el equilibrio walrasiano y compute las WEA.

Ejercicio A.1

(a) Halle todas las asignaciones óptimas de Pareto en esta economía.

Solución:

- Recordando que $TMS_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}}$.

$$TMS_{12}^1(\mathbf{x}) = \frac{x_2^1}{x_1^1}$$

$$TMS_{12}^2(\mathbf{x}) = \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

- Igualando $TMS_{12}^1 = TMS_{12}^2$

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

Ejercicio A.1

- Planteo la condición de factibilidad para cada bien y despejo x_1^2 y x_2^2 .

$$x_1^1 + x_1^2 = e_1^1 + e_1^2 = 15 \implies x_1^2 = 15 - x_1^1$$

$$x_2^1 + x_2^2 = e_2^1 + e_2^2 = 15 \implies x_2^2 = 15 - x_2^1$$

- Remplazo x_1^2 y x_2^2 en $TMS_{12}^1 = TMS_{12}^2$ y despejo x_2^1

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{15 - x_2^1}{15 - x_1^1}$$

$$(15 - x_1^1)x_2^1 = (15 - x_2^1)x_1^1$$

$$15x_2^1 - x_1^1x_2^1 = 15x_1^1 - x_1^1x_2^1$$

$$15x_2^1 = 15x_1^1$$

$$x_2^1 = x_1^1$$

Ejercicio A.1

1

- Por lo tanto, en cualquier asignación Pareto Eficiente factible debe cumplirse la siguiente relación:

$$x_2^1 = x_1^1 \text{ con } 0 \leq x_i^1 \leq 15 \text{ siendo } i = \{1; 2\}.$$

- Las asignaciones para el agente 2 salen por diferencia respecto de las dotaciones totales de la economía.

Ejercicio A.1

(b) *Caracterice el núcleo de esta economía.*

Solución:

- En esta economía el núcleo serán todas las asignaciones OP tales que ningún agente puede hacerlo mejor solo.
- Primero veamos cuales son los niveles de utilidad que pueden alcanzar con sus dotaciones iniciales.

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 x_2^1 \quad ; \quad u^1(e_1^1, e_2^1) = 10 \times 5 = 50$$

$$u^2(x_1^2, x_2^2) = x_1^2 x_2^2 \quad ; \quad u^2(e_1^2, e_2^2) = 5 \times 10 = 50$$

- El core de la economía es el set de todas las canastas OP (inciso anterior), x_j^i , que satisfacen la siguiente relación:

$$u^1(x_1^1, x_2^1) \geq u^1(e_1^1, e_2^1) = u^1(10, 5) = 50$$

$$u^2(x_1^2, x_2^2) \geq u^2(e_1^2, e_2^2) = u^2(5, 10) = 50$$

Ejercicio A.1

(c) *Encuentre el equilibrio walrasiano y compute las WEA.*

Solución:

- Primero buscamos el equilibrio.
- Dadas las preferencias Cobb-Douglas, conocemos las demandas marshallianas:

$$x_1^1 = \frac{1}{2} \frac{(10p_1 + 5p_2)}{p_1}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{2} \frac{(10p_1 + 5p_2)}{p_2}$$

$$x_1^2 = \frac{1}{2} \frac{(5p_1 + 10p_2)}{p_1}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2} \frac{(5p_1 + 10p_2)}{p_2}$$

Ejercicio A.1

- Reemplazamos en la condición de vaciado para el mercado 1:

$$x_1^1 + x_1^2 = e_1^1 + e_1^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{(10p_1 + 5p_2)}{p_1} + \frac{1}{2} \frac{(5p_1 + 10p_2)}{p_1} = 15$$

$$15p_1 + 15p_2 = 30p_1$$

$$p_1 = p_2$$

- El equilibrio walrasiano se da con un vector de precios relativos tal que:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 \implies \frac{p_1}{p_2} = 1$$

- La condición para vaciar el mercado del bien 2 es análoga y conduce al mismo resultado. Verificar.

Ejercicio A.1

- Ahora buscamos las WEA asociada al equilibrio walrasiano.
- Trabajamos con las demandas del agente 1 y remplazamos los precios relativos (sería más fácil tomando un numerario) para obtener sus WEA:

$$x_1^1 = \frac{1}{2} \frac{(10p_1 + 5p_2)}{p_1} = 5 + \frac{5p_2}{2p_1} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{2} \frac{(10p_1 + 5p_2)}{p_2} = \frac{5p_1}{p_2} + \frac{5}{2} = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

- Trabajamos con las demandas del agente 2 y remplazamos los precios relativos para obtener sus WEA:

$$x_1^2 = \frac{1}{2} \frac{(5p_1 + 10p_2)}{p_1} = \frac{5}{2} + \frac{5p_2}{p_1} = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2} \frac{(5p_1 + 10p_2)}{p_2} = \frac{5p_1}{2p_2} + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$$

Ejercicio A.11

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes. Las preferencias del consumidor 1 están representadas por la siguiente función de utilidad:

$$u^1(x_1^1; x_2^1) = x_1^1 x_2^1 \quad \mathbf{e}^1 = (3, 2)$$

y las del consumidor 2 por:

$$u^2(x_1^2; x_2^2) = 3x_1^2 + x_2^2 \quad \mathbf{e}^2 = (2, 3)$$

- (a) ¿Se cumplen las condiciones suficientes de existencia de equilibrio competitivo en esta economía? En caso negativo, indique qué condiciones no se cumplen.
- (b) Determine, si existe, el equilibrio competitivo en esta economía.

Ejercicio A.11

(a) ¿Se cumplen las condiciones suficientes de existencia de equilibrio competitivo en esta economía? En caso negativo, indique qué condiciones no se cumplen.

Teorema 5.5 Existencia de Equilibrio Walrasiano.

If each consumer's utility function satisfies Assumption 5.1, and $\sum_{i=1}^I \mathbf{e}^i \gg 0$, then there exists at least one price vector, $\mathbf{p}^* \gg 0$, such that $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$.

Supuesto 5.1 (Utilidad del Consumidor).

Utility u^i is continuous, strongly increasing, and strictly quasiconcave on $\mathbb{R}_+^n$.

- La función de utilidad del consumidor 1 tiene preferencias del tipo Cobb-Douglas que no cumplen con el Supuesto 5.1.
- La función de utilidad del consumidor 2 tiene preferencias del tipo sustitutivos que no cumplen con cuasiconcavidad estricta.
- Por lo tanto, no se cumplen las condiciones suficientes de existencia de equilibrio competitivo.

Ejercicio A.11

(b) *Determine, si existe, el equilibrio competitivo en esta economía.*

- Primero buscamos si hay solución interior igualando la TMS del consumidor 2 a la relación de precios.

$$TMS_{12}^2(\mathbf{x}) = \frac{3}{1} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Tomamos como numerario $p_2 = 1$, por lo que determinamos $p_1 = 3$.
- Calculo las demandas del agente 1:

$$x_1^1 = 0,5 \frac{3p_1 + 2p_2}{p_1} = 0,5 \frac{3 \times 3 + 2 \times 1}{3} = \frac{11}{6} \cong 1,83$$

$$x_2^1 = 0,5 \frac{3p_1 + 2p_2}{p_2} = 0,5 \frac{3 \times 3 + 2 \times 1}{1} = \frac{11}{2} = 5,5$$

Ejercicio A.11

$$x_1^1 = \frac{11}{6} \cong 1,83$$

$$x_2^1 = \frac{11}{2} = 5,5$$

- Esta asignación no pueden ser de equilibrio, ya que x_2^1 no es factible.
- Verifiquemos si existe solución de esquina. Planteemos las demandas del consumidor 2:

$$x_1^2 = \begin{cases} \frac{y^2}{p_1} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} < 3 \\ 0 \leq x_1^2 \leq \frac{y^2}{p_1} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} = 3 \\ 0 & \text{si } \frac{p_1}{p_2} > 3 \end{cases}$$

$$x_2^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{p_1}{p_2} < 3 \\ 0 \leq x_2^2 \leq \frac{y^2}{p_2} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} = 3 \\ \frac{y^2}{p_2} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} > 3 \end{cases}$$

- Siendo $y^2 = 2p_1 + 3p_2$

Ejercicio A.11

- Los precios relativos $\frac{p_1}{p_2} = 3$ no equilibraban los mercados, por lo tanto vamos a proponer otros precios relativos.
- Primero, supongamos $\frac{p_1}{p_2} < 3$, aplicamos la condición de vaciado del mercado del bien 1:

$$0,5 \frac{3p_1 + 2p_2}{p_1} + \frac{2p_1 + 3p_2}{p_1} = 5$$

- Despejamos llegamos al resultado:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{8}{3} \cong 2,67$$

- Efectivamente se cumple que $\frac{p_1}{p_2} < 3$, por lo que $\frac{p_1}{p_2} = \frac{8}{3}$ es un equilibrio competitivo.
- Reemplazamos el vector de precios en las demandas marshallianas para calcular las WEAs:

$$x_1^1 = \frac{15}{8} \quad x_2^1 = 5 \quad x_1^2 = \frac{25}{8} \quad x_2^2 = 0$$

Ejercicio A.11

- Ahora, supongamos $\frac{p_1}{p_2} > 3$, aplicamos la condición de vaciado del mercado del bien 1:

$$0,5 \frac{3p_1 + 2p_2}{p_1} + 0 = 5$$

- Despejamos llegamos al resultado:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{7} \cong 0,29$$

- Esto contradice que $\frac{p_1}{p_2} > 3$, por lo que $\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{7}$ no es un equilibrio competitivo.
- Habiendo probado los 3 casos posibles, podemos afirmar que solo existe 1 equilibrio walrasiano.

Ejercicio B.1

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 . Las preferencias de los agentes son representadas por:

$$u^1(x_1^1; x_2^1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1^1 + x_2^1 < 1 \\ x_1^1 + x_2^1 & \text{si } x_1^1 + x_2^1 \geq 1 \end{cases}$$
$$u^2(x_1^2; x_2^2) = x_1^2 x_2^2$$

y las dotaciones iniciales están dadas por $\mathbf{e}^1 = (1; 0)$ y $\mathbf{e}^2 = (0; 1)$.

- (a) ¿Se cumplen las condiciones suficientes para aplicar Primer Teorema del Bienestar? En caso negativo indique qué condición no se cumple.
- (b) Halle los equilibrios Walrasianos que existan y sus respectivas WEA ¿Son estas eficientes? Puede resultar útil hallar la curva de contratos para este inciso.
- (c) ¿Pertenecen todas las WEA al núcleo de la economía?

Ejercicio B.1

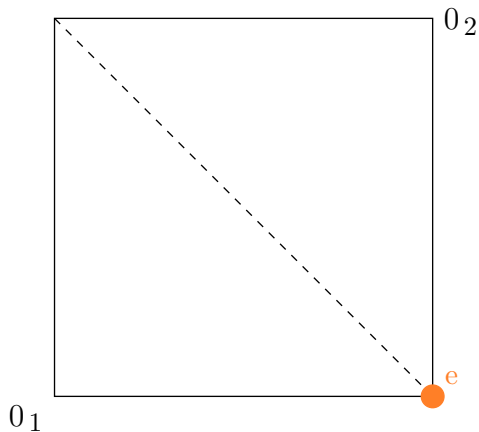


Figura 1: Caja de Edgeworth y dotación inicial.

Ejercicio B.1

(a) ¿Se cumplen las condiciones suficientes para aplicar Primer Teorema del Bienestar? En caso negativo indique qué condiciones no se cumplen.

- Las función de utilidad del agente 1 no es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_+^n$, por lo que no se cumplen las condiciones suficientes.

(b) Halle los equilibrios Walrasianos que existan y sus respectivas WEA ¿Son estas eficientes? Puede resultar útil hallar la curva de contratos para este inciso.

- Asumiendo que existe solución interior, y considerando la región superior derecha de la caja (rama inferior del agente 1), calculo la TMS del consumidor 1 y la igualo a la relación de precios:

$$TMS_{12}^1 = \frac{1}{1} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Si tomamos al bien 1 como numerario ($p_1 = 1$), $p_2^* = 1$.

Ejercicio B.1

- Reemplazamos $\frac{p_1}{p_2}$ en las demandas marshallianas del agente 2:

$$x_1^2 = 0,5 \frac{p_2}{p_1} = 0,5$$

$$x_2^2 = 0,5 \frac{p_2}{p_2} = 0,5$$

- Luego, conociendo que para el agente 1 los bienes son sustitutos perfectos, con $p_1 = p_2$ estará indistinto en cómo distribuir su consumo entre ellos.

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^1 \in [0; \frac{p_1}{p_1}] \\ x_2^1 = x_2^1 \in [0; \frac{p_1}{p_2}] \end{cases} \quad \text{con} \quad p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 = p_1$$

- Obtenemos sus demandas por las condiciones de vaciado de los mercados:

$$e_1 = 1 = x_1^1 + x_1^2 = x_1^1 + 0,5 \rightarrow x_1^1 = 0,5$$

$$e_2 = 1 = x_2^1 + x_2^2 = x_2^1 + 0,5 \rightarrow x_2^1 = 0,5$$

Ejercicio B.1

Entonces, definimos el equilibrio walrasiano y su respectiva WEA:

$$\frac{\mathbf{p}_1^*}{\mathbf{p}_2^*} = 1$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) = \{x^1 = (0, 5; 0, 5); \ x^2 = (0, 5; 0, 5)\}$$

Ejercicio B.1

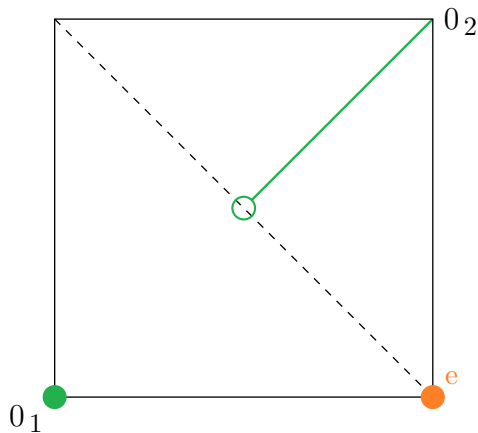


Figura 2: Caja de Edgeworth y curva de contrato (en verde).

¿Es esta WEA eficiente? No, no es un Óptimo de Pareto, o dicho de otra forma, no pertenece a la curva de contratos. Un desplazamiento desde $(0,5;0,5)$ a cualquier asignación hacia el suroeste sería una mejora para el agente 2 e indiferente para el agente 1.

Ejercicio B.1

- ¿Puede existir un equilibrio competitivo en el que uno de los precios es cero?

Intentemos:

- Asumamos primero $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$: Lo que ocurriría es que la demanda del agente 2 del bien 1 ($x_1^2 = 0,5 \frac{p_2}{p_1}$) tendería a infinito, por lo tanto el mercado no se equilibraría.
- El otro caso sería que $p_2 = 0$ y $p_1 > 0$: Lo que ocurriría es que la demanda del consumidor 1 del bien 2 ($x_2^1 = \frac{p_1}{p_2}$) tendería a infinito, por lo tanto el mercado tampoco se equilibraría.

Ejercicio B.1

(c) *¿Pertenecen todas las WEA al núcleo de la economía?*

- No, la asignación de equilibrio no pertenece al núcleo.
- El área lenticular es toda la caja. En e ambos agentes tienen su mínimo nivel de utilidad posible (1 para el agente 1, y 0 para el agente 2). El agente 2 mejorará en cualquier asignación con cantidades no nulas de ambos bienes, y el agente 1 mejorará estrictamente en asignaciones con $x_1^1 + x_2^1 > 1$ y será indiferente en el resto. La única otra asignación en que ambos tendrían su nivel mínimo de utilidad es la que corresponde a la esquina superior izquierda de la caja.
- Entonces, si bien la WEA pertenece al área lenticular, no es eficiente en el sentido de Pareto ya que no pertenece a la curva de contratos.
- En esta economía la curva de contrato y el núcleo están conformadas por las mismas asignaciones.

Ejercicio B.2

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 . Las preferencias de los agentes son representadas por:

$$u^i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i x_2^i, \text{ con } i = 1; 2,$$

y las dotaciones iniciales están dadas por $\mathbf{e}^1 = (1; 5)$ y $\mathbf{e}^2 = (5; 1)$.

- (a) Halle la demanda excedente para esta economía.
- (b) Compruebe de modo directo que cualquier asignación óptima de Pareto en la que cada agente consume cantidades positivas de ambos bienes puede sostenerse como equilibrio competitivo con las transferencias adecuadas.

Ejercicio B.2

(a) Halle la demanda excedente para esta economía.

- **Demanda Excedente:** La función de demanda excedente para el bien k es la función de valor real:

$$z_k(\mathbf{p}) \equiv \sum_{i \in I} x_k^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i) - \sum_{i \in I} e_k^i$$

Solución:

- La demanda marshalliana para el bien 1 es igual a:

$$x_1^i = \frac{1}{2} \frac{(p_1 e_1^i + p_2 e_2^i)}{p_1}$$

- Por lo tanto:

$$z_1(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \frac{(p_1 + 5p_2)}{p_1} + \frac{1}{2} \frac{(5p_1 + p_2)}{p_1} - 6 = \frac{(3p_1 + 3p_2)}{p_1} - 6$$

- La función de demanda excedente para el bien 1 es:

$$z_1(\mathbf{p}) = 3 \frac{(p_1 + p_2)}{p_1} - 6$$

Ejercicio B.2

- La demanda marshalliana para el bien 2 es igual a:

$$x_2^i = \frac{1}{2} \frac{(p_1 e_1^i + p_2 e_2^i)}{p_2}$$

$$z_2(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \frac{(5p_1 + p_2)}{p_2} + \frac{1}{2} \frac{(p_1 + 5p_2)}{p_2} - 6 = \frac{(3p_1 + 3p_2)}{p_2} - 6$$

- La función de demanda excedente para el bien 2 es:

$$z_2(\mathbf{p}) = 3 \frac{(p_1 + p_2)}{p_2} - 6$$

Ejercicio B.2

(b) Compruebe de modo directo que cualquier asignación óptima de Pareto en la que cada agente consume cantidades positivas de ambos bienes puede sostenerse como equilibrio competitivo con las transferencias adecuadas.

Solución:

- Condición de Óptimo de Pareto para una solución interior:

$$TMS_{12}^1 = TMS_{12}^2$$

$$TMS_{12}^1 = \frac{x_2^1}{x_1^1} \quad ; \quad TMS_{12}^2 = \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

- Por otro lado, planteamos la condición de factibilidad en cada mercado:

$$x_1^1 + x_1^2 = e_1^1 + e_1^2 \Rightarrow x_1^2 = 6 - x_1^1$$

$$x_2^1 + x_2^2 = e_2^1 + e_2^2 \Rightarrow x_2^2 = 6 - x_2^1$$

Ejercicio B.2

- Reemplazamos x_1^2 y x_2^2 (de las condiciones de factibilidad) en $TMS_{12}^1 = TMS_{12}^2$:

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{6 - x_2^1}{6 - x_1^1}$$

$$x_2^1(6 - x_1^1) = x_1^1(6 - x_2^1)$$

$$6x_2^1 - x_1^1x_2^1 = 6x_1^1 - x_2^1x_1^1$$

$$x_2^1 = x_1^1$$

- Luego si las cantidades de ambos bienes son iguales, las TMS de ambos van a tener valor 1.
 - Notar que si hay un equilibrio competitivo los precios tienen que igualar a las TMS, con lo cual los precios tienen que ser iguales.
1. Vamos a proponer una asignación OP $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2)$
 2. Vamos a mostrar que es alcanzable con las transferencias adecuadas.
 3. Vamos a mostrar que de hecho hay un vector de precios que permite sostenerla como una WEA, i.e. hay un vector de precios que es un equilibrio Walrasiano, y lo vamos a encontrar, aunque ya sabemos que es $p_1 = p_2$.

Ejercicio B.2

- Planteamos el esquema de transferencias para poder llegar a $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\bar{x}_1^1 = e_1^1 + t_1^1$$

$$\bar{x}_2^1 = e_2^1 + t_2^1$$

$$\bar{x}_1^2 = e_1^2 - t_1^1$$

$$\bar{x}_2^2 = e_2^2 - t_2^1$$

Donde t_1^1 y t_2^1 son la transferencias entre el agente 1 y el agente 2 de los bienes 1 y 2 respectivamente, y podrán ser positivas o negativas dependiendo de quien recibe y quien entrega bienes.

- Ahora vamos a proponer que los agentes parten de $\bar{\mathbf{x}}$ como sus nuevas dotaciones y vamos a mostrar que existe un precio para el cual $\bar{\mathbf{x}}$ es WEA.

Ejercicio B.2

- Cuando las dotaciones de los agentes (post-transferencias) son $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2)$, las demandas Marshallianas de los agentes en función de los precios son:

$$x_1^1 = \frac{1}{2} \frac{p_1 \bar{x}_1^1 + p_2 \bar{x}_2^1}{p_1}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{2} \frac{p_1 \bar{x}_1^1 + p_2 \bar{x}_2^1}{p_2}$$

$$x_1^2 = \frac{1}{2} \frac{p_1 \bar{x}_1^2 + p_2 \bar{x}_2^2}{p_1}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2} \frac{p_1 \bar{x}_1^2 + p_2 \bar{x}_2^2}{p_2}$$

Ejercicio B.2

- Planteamos la condición de vaciado para el mercado 1:

$$\frac{1}{2} \frac{p_1 \bar{x}_1^1 + p_2 \bar{x}_2^1}{p_1} + \frac{1}{2} \frac{p_1 \bar{x}_1^2 + p_2 \bar{x}_2^2}{p_1} = 6$$

- Despejamos p_2 tomando a p_1 como numerario:

$$p_2 = \frac{12}{\bar{x}_2^1 + \bar{x}_2^2} - \frac{\bar{x}_1^1 + \bar{x}_1^2}{\bar{x}_2^1 + \bar{x}_2^2}$$

- Usando la condición de Pareto Eficiencia ($x_2^i = x_1^i$) llegamos a:

$$p_2 = \frac{12}{\bar{x}_1^1 + \bar{x}_1^2} - 1$$

$$p_2 = \frac{12}{e_1^1 + t_1^1 + e_1^2 - t_1^1} - 1$$

$$p_2 = \frac{12}{1 + 5} - 1$$

- Finalmente encontramos que $p_2 = 1$, o lo que es lo mismo que $p_1 = p_2$

Ejercicio B.2

- Reemplazamos el vector de precios en las demandas marshallianas:

$$x_1^1 = \frac{\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1}{2}$$

$$x_2^1 = \frac{\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1}{2}$$

$$x_1^2 = \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2}$$

$$x_2^2 = \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2}$$

- Podemos saber a priori que las asignaciones serán Pareto eficientes, ya que $x_1^1 = x_2^1$ y $x_1^2 = x_2^2$.

Ejercicio B.2

- A modo de chequeo, vemos si se vacian los mercados. Tomamos la condición de vaciado del mercado del bien 1 y la valuamos en las nuevas demandas marshallianas:

$$\frac{\bar{x}_1^1 + \bar{x}_2^1}{2} + \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}{2} = 6$$

$$(e_1^1 + t_1^1) + (e_2^1 + t_2^1) + (e_1^2 - t_1^1) + (e_2^2 - t_2^1) = 12$$

$$e_1^1 + e_2^1 + e_1^2 + e_2^2 = 12$$

$$1 + 5 + 5 + 1 = 12$$

- Comprobamos que $p_1 = p_2$ es un equilibrio walrasiano.

Ejercicio B.4

Consigna:

Probar Lema 5.1 y Lema 5.2 de J&R.

1. **Lemma 5.1**

Let $\mathbf{p}^$ be a Walrasian equilibrium for some economy with initial endowments $\mathbf{e}$. Let $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ be the associated WEA. Then $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) \in F(\mathbf{e})$.*

2. **Lemma 5.2**

Suppose that u^i is strictly increasing on $\mathbb{R}_+^n$, that consumer i 's demand is well-defined at $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ and equal to $\hat{\mathbf{x}}^i$, and that $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}_+^n$.

- i. If $u^i(\mathbf{x}^i) > u^i(\hat{\mathbf{x}}^i)$, then $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i > \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}^i$.*
- ii. If $u^i(\mathbf{x}^i) \geq u^i(\hat{\mathbf{x}}^i)$, then $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i \geq \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}^i$.*

Ejercicio B.4

Demostración *Lemma 5.1*:

- Caveat: vamos a demostrarlo para preferencias estrictamente monótonas mostrando que si no se cumple el Lema 5.1 no se cumple la ley de Walras.
- Asignación factible:

$$F(\mathbf{e}) \equiv \left\{ \mathbf{x} \mid \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{x}^i = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{e}^i \right\},$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) = (\mathbf{x}^1(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^1) + \dots + \mathbf{x}^I(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^I))$$

- Supongamos que $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ no es factible, por lo tanto tengo que:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{x}^i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^i) \neq \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbf{e}^i$$

$$\mathbf{x}^1(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^1) + \dots + \mathbf{x}^I(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^I) \neq \mathbf{e}^1 + \dots + \mathbf{e}^I$$

Ejercicio B.4

- Multiplico por lo precios y obtengo:

$$\mathbf{p}^* (\mathbf{x}^1(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^1) + \dots + \mathbf{x}^I(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}^I)) \neq \mathbf{p}^* (\mathbf{e}^1 + \dots + \mathbf{e}^I)$$

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}^*) \neq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}$$

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}^*) - \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e} \neq 0$$

$$\mathbf{p}^* (\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) - \mathbf{e}) \neq 0$$

- Recordando la Ley de Walras: La suma del valor de los excesos de demanda debe dar 0 para cualquier vector de precios i.e. *independientemente del vaciado de los mercados*.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$$

Donde cada elemento de $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ está dado por:

$$z_k(\mathbf{p}) \equiv \sum_{i \in \mathcal{I}} x_k^i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^i) - \sum_{i \in \mathcal{I}} e_k^i$$

- Por lo que si $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*)$ es una WEA debe ser factible; en su defecto violaría la Ley de Walras. Ahora bien, ¿qué implicaría que no se cumpla?



Ejercicio B.4

Demostración Lemma 5.2 i:

i. If $u^i(\mathbf{x}^i) > u^i(\hat{\mathbf{x}}^i)$, then $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i > \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}^i$.

Si $\hat{\mathbf{x}}^i$ maximiza u^i sujeto a la restricción presupuestaria para los precios $\mathbf{p}$, toda canasta estrictamente preferida a $\hat{\mathbf{x}}^i$ no debe ser asequible a ese nivel de precios.

- Vamos a demostrarlo por contradicción. Suponga $\bar{\mathbf{x}}^i \succsim \hat{\mathbf{x}}^i$ pero más barata, i.e.,

$$u^i(\bar{\mathbf{x}}^i) \geq u^i(\hat{\mathbf{x}}^i) \quad \text{y} \quad \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}^i < \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{e}}^i$$

- Dado que $\bar{\mathbf{x}}^i$ están en el interior del conjunto presupuestario y las preferencias de i son estrictamente monótonas, existe una canasta $\tilde{\mathbf{x}}^i$ que tiene más de todos los bienes que $\bar{\mathbf{x}}^i$ que es estrictamente mejor y también asequible, i.e.,

$$u^i(\tilde{\mathbf{x}}^i) > u^i(\bar{\mathbf{x}}^i) \quad \text{y} \quad \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{x}}^i \leq \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{e}}^i$$

- Por transitividad $u^i(\tilde{\mathbf{x}}^i) > u^i(\hat{\mathbf{x}}^i) \Rightarrow$ Contradice que $\hat{\mathbf{x}}^i$ maximiza u^i .
- Por lo tanto, dada una canasta $\hat{\mathbf{x}}^i$ que maximiza la utilidad del consumidor, ninguna canasta estrictamente preferida a ella debe ser asequible.

□

Ejercicio B.4

Demostración *Lemma 5.2* ii:

ii. If $u^i(\mathbf{x}^i) \geq u^i(\hat{\mathbf{x}}^i)$, then $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i \geq \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}^i$.

- Vamos a demostrarlo por contradicción.
- Supongamos que no se cumple $\Rightarrow$ If $u^i(\mathbf{x}^i) \geq u^i(\hat{\mathbf{x}}^i)$, then $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^i < \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}^i$.
- Si tenemos $\mathbf{x}^i$ y aumentamos de forma infinitesimal todos los bienes hasta $\bar{\mathbf{x}}^i \gg \mathbf{x}^i$ pero que sigue siendo más barato que $\hat{\mathbf{x}}^i$, dado que la utilidad es estrictamente creciente, obtenemos que:

$$u^i(\bar{\mathbf{x}}^i) > u^i(\mathbf{x}^i) \geq u^i(\hat{\mathbf{x}}^i)$$

- Pero eso contradice a i. porque $\bar{\mathbf{x}}^i$ tiene más utilidad que $\hat{\mathbf{x}}^i$, pero saldría más barato, por lo que queda demostrado el Lemma 5.2 ii.



Ejercicio B.3

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 . Las preferencias de los agentes son representadas por:

$$\begin{aligned}u^1(x_1^1, x_2^1) &= x_1^1 + 2(x_2^1)^{1/2}, \\u^2(x_1^2, x_2^2) &= x_1^2 + (x_2^2)^{1/2},\end{aligned}$$

y las dotaciones iniciales están dadas por $\mathbf{e}^1 = (0; 4)$ y $\mathbf{e}^2 = (6; 2)$.

- (a) ¿Se cumplen las condiciones suficientes para la existencia del equilibrio competitivo?
- (b) Halle todas las WEA, o compruebe que no existen.
- (c) ¿Se cumplen las condiciones descriptas en el Primer Teorema del Bienestar?
- (d) Halle el conjunto de Pareto de esta economía, y si obtuvo equilibrios competitivos verifique si son Óptimos de Pareto.

Ejercicio B.3

(a) *¿Se cumplen las condiciones suficientes para la existencia del equilibrio competitivo?*

Teorema 5.5 Existencia de Equilibrio Walrasiano.

If each consumer's utility function satisfies Assumption 5.1, and $\sum_{i=1}^I \mathbf{e}^i \gg 0$, then there exists at least one price vector, $\mathbf{p}^* \gg 0$, such that $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$.

Supuesto 5.1 (Utilidad del Consumidor).

Utility u^i is continuous, strongly increasing, and strictly quasiconcave on $\mathbb{R}_+^n$.

- La funciones de utilidad de ambos consumidores cumplen con el Supuesto 5.1 y las dotaciones totales de esta economía son positivas en todos los mercados, por lo tanto, se cumplen las condiciones suficientes de Existencia de Equilibrio Walrasiano.

Ejercicio B.3

(b) Halle todas las WEA, o compruebe que no existen.

- Observamos las curvas de indiferencia que atraviesan la dotación inicial (la curva azul corresponde al agente 1, y la roja al agente 2):

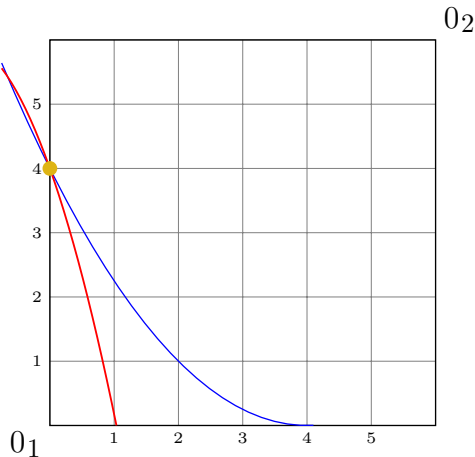


Figura 3: Dotaciones iniciales y curvas de indiferencia

Ejercicio B.3

- Nuestro objetivo es encontrar aquellos vectores de precios que equilibren todos los mercados y su correspondientes asignaciones. Sabemos que al menos un vector de este tipo existe debido al inciso (a).
- Primero, analicemos el problema de equilibrio parcial, en el que cada individuo maximiza su bienestar dada su restricción presupuestaria.
- Vamos a representar la función de utilidad de cada agente en el nivel que obtiene en su dotación inicial, y analizaremos las cantidades que demanda de cada uno de los bienes dependiendo del vector de precios al que se enfrente.

Ejercicio B.3

- Calculamos las TMS de los consumidores y las evaluamos en la dotación inicial:

$$TMS_{12}^1(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_2^1)^{-1/2}} = (x_2^1)^{1/2}$$

$$TMS_{12}^1(\mathbf{e}^1) = 2$$

$$TMS_{12}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\frac{1}{2} (x_2^2)^{-1/2}} = 2 (x_2^2)^{1/2}$$

$$TMS_{12}^2(\mathbf{e}^2) = 2^{3/2}$$

- Observar gráficamente.

Ejercicio B.3

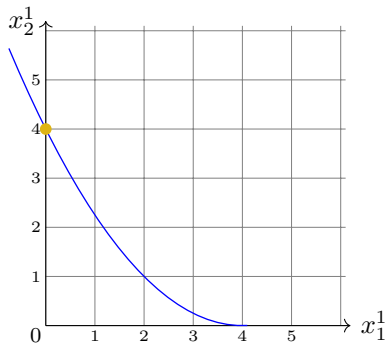


Figura 4: Curva de indiferencia del agente 1

$$x_1^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{p_1}{p_2} \geq 2 \\ \frac{4p_2}{p_1} - \frac{p_1}{p_2} & \text{si } \frac{p_1}{p_2} < 2 \end{cases}$$
$$x_2^1 = \begin{cases} 4 & \text{si } \frac{p_1}{p_2} \geq 2 \\ \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 & \text{si } \frac{p_1}{p_2} < 2 \end{cases}$$

Ejercicio B.3

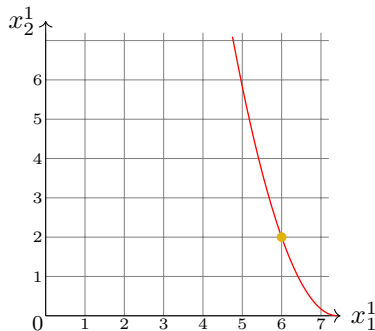


Figura 5: Curva de indiferencia del agente 2

$$x_1^2 = \begin{cases} \frac{w^2}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2} & \text{si } \frac{w^2}{p_1^2} > \frac{p_1}{4p_2} \\ 0 & \text{si } \frac{w^2}{p_1} \leq \frac{p_1}{4p_2} \end{cases}$$
$$x_2^2 = \begin{cases} \left(\frac{p_1}{2p_2}\right)^2 & \text{si } \frac{w^2}{p_1^2} > \frac{p_1}{4p_2} \\ \frac{w^2}{p_2} & \text{si } \frac{w^2}{p_1} \leq \frac{p_1}{4p_2} \end{cases}$$

- Donde $w^2 = 6p_1 + 2p_2$ es la renta del agente 2.

Ejercicio B.3

- ¿Los vectores de precios $\frac{p_1}{p_2} < 2$ equilibran el mercado?

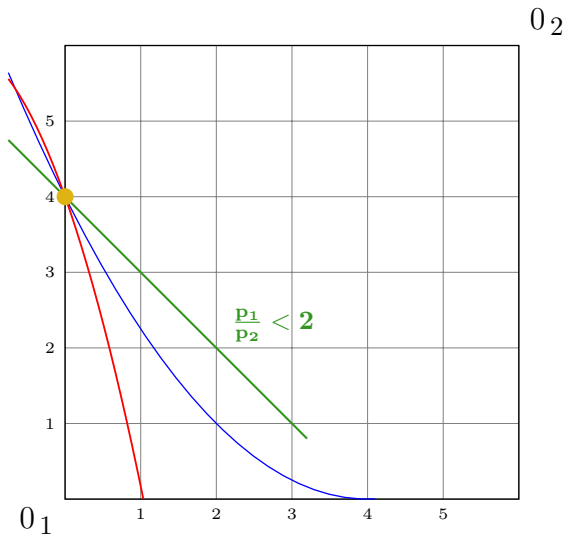


Figura 6: Curvas de indiferencia y vector de precios

Ejercicio B.3

- ¿El vector de precios $\frac{p_1}{p_2} = 2$ equilibra el mercado?

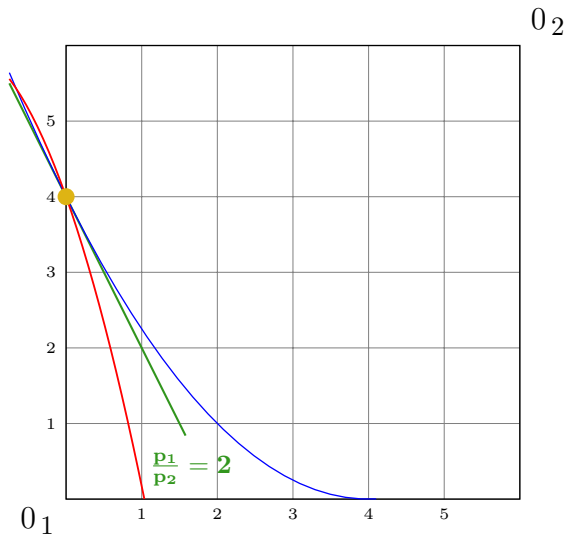


Figura 7: Curvas de indiferencia y vector de precios

Ejercicio B.3

- ¿Los vectores de precios $2 < \frac{p_1}{p_2} < 2^{3/2}$ equilibran el mercado?

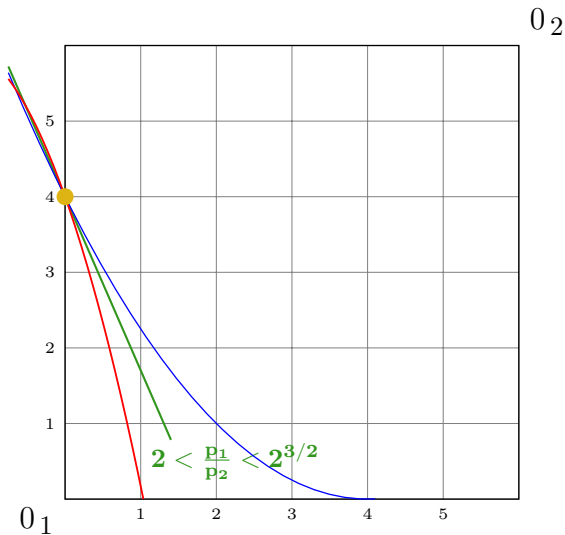


Figura 8: Curvas de indiferencia y vector de precios

Ejercicio B.3

- ¿El vector de precios $\frac{p_1}{p_2} = 2^{3/2}$ equilibra el mercado?

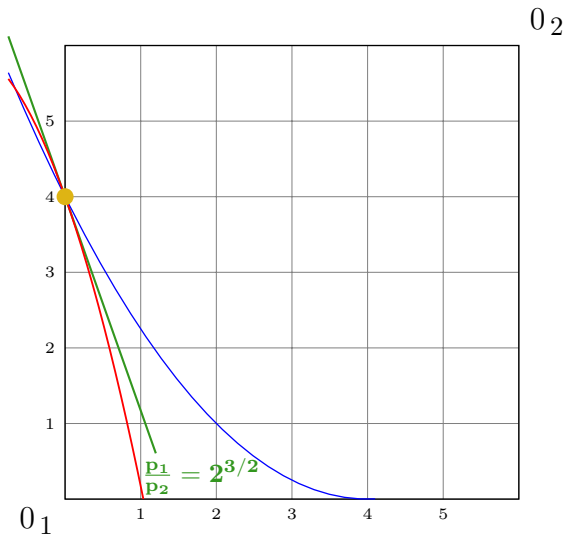


Figura 9: Curvas de indiferencia y vector de precios

Ejercicio B.3

- ¿Los vectores de precios $\frac{p_1}{p_2} > 2^{3/2}$ equilibran el mercado?

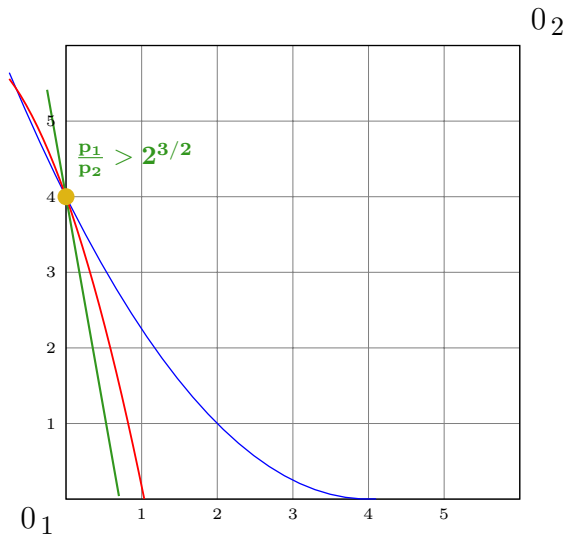


Figura 10: Curvas de indiferencia y vector de precios

Ejercicio B.3

- Observemos si el vector $\frac{p_1}{p_2} = 2^{3/2}$ equilibra el mercado.
- Dado que el vector de precios es mayor a 2 las demandas del agente 1 serán:

$$x_1^1 = 0 \quad x_2^1 = 4$$

- Para el agente 2, deberíamos partir de la desigualdad que determina su función de demanda. Sin embargo, gráficamente sabemos que para el vector de precios de equilibrio, el agente demanda cantidades positivas de ambos bienes. Esto nos permite descartar el tramo inferior de sus dos funciones de demanda (ver funciones de demanda).
- En consecuencia, las demandas del agente 2 son:

$$x_1^2 = \frac{\overbrace{6p_1 + 2p_2}^{w^2}}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2} 2 \quad x_2^2 = \left(\frac{p_1}{2p_2} \right)^2$$

Ejercicio B.3

- Planteando la condición de vaciado del mercado del bien 2:

$$4 + \left(\frac{p_1}{2p_2} \right)^2 = 6$$

$$\left(\frac{p_1}{2p_2} \right)^2 = 2$$

$$\frac{p_1}{2p_2} = 2^{1/2}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = 2^{3/2}$$

- Verificamos que el vector de precios $\frac{p_1}{p_2} = 2^{3/2}$ equilibra los mercados.
- Las asignaciones de equilibrio walrasiano son:

$$x_1^1 = 0 \quad x_2^1 = 4 \quad x_1^2 = 6 \quad x_2^2 = 2$$

Ejercicio B.3

(c) *¿Se cumplen las condiciones descritas en el Primer Teorema del Bienestar?*

- Las preferencias de ambos consumidores son estrictamente monótonas por lo que se cumplen las condiciones del Primer Teorema del Bienestar.

Ejercicio B.3

(d) Halle el conjunto de Pareto de esta economía, y si obtuvo equilibrios competitivos verifique si son Óptimos de Pareto

- Suponiendo que el equilibrio se da con tangencia de las curvas de indiferencia, calculo las TMS de ambos consumidor:

$$TMS_{12}^1(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_2^1)^{-1/2}} = (x_2^1)^{1/2}$$

$$TMS_{12}^2(\mathbf{x}) = \frac{2}{(x_2^2)^{-1/2}} = 2 (x_2^2)^{1/2}$$

- Igualo las TMS:

$$(x_2^1)^{1/2} = 2 (x_2^2)^{1/2}$$
$$x_2^1 = 4x_2^2$$

Ejercicio B.3

- Reemplazo la ecuación de la curva de contratos en la condición de vaciado del mercado del bien 2:

$$x_2^1 + x_2^2 = \mathbf{e}_2^1 + \mathbf{e}_2^2$$

$$4x_2^2 + x_2^2 = 4 + 2$$

$$5x_2^2 = 6$$

$$x_2^2 = \frac{6}{5}$$

$$x_2^1 = 4 \times \frac{6}{5} = \frac{24}{5}$$

Ejercicio B.3

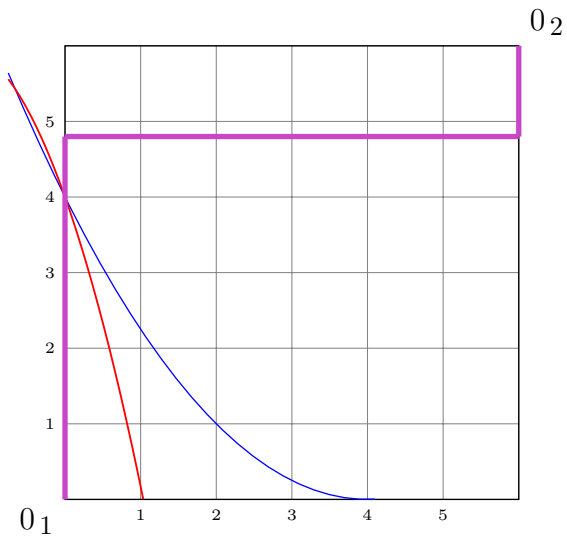


Figura 11: Curva de contrato

Ejercicio B.3

- La intuición que hay detrás de los tramos verticales de la curva de contratos reside en cómo se cruzan las curvas de indiferencias que cruzan las asignaciones por debajo o por encima de $x_2^1 = 4, 8$.
- Por debajo del tramo horizontal, la TMS del agente 2 es mayor que la del agente 1, por lo que el área lenticular formada por las curvas de indiferencia queda dibujada hacia la izquierda.
- El caso inverso ocurre por arriba de $x_2^1 = 4, 8$.
- Entonces, las asignaciones OP serán aquellas con tangencia de curvas de indiferencia (tramo horizontal) o aquellas con solución de esquina para uno de los agentes (tramos verticales).

Ejercicio B.5

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 donde las preferencias de los agentes son representadas por:

$$u^i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i(4 - x_2^i), \text{ con } i = \{1; 2\}.$$

y las dotaciones iniciales están dadas por $\mathbf{e}^1 = (1; 3)$ y $\mathbf{e}^2 = (3; 1)$.

- (a) Halle el conjunto de Pareto de esta economía.
- (b) Obtenga todas las WEA de esta economía.
- (c) Suponga que las dotaciones iniciales se modifican a $\mathbf{e}^1 = (1; 0)$ y $\mathbf{e}^2 = (3; 4)$. Halle las WEA una vez más. Explique intuitivamente la diferencia entre su resultado y el obtenido en (b).
- (d) ¿En esta economía, es posible alcanzar todas las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto, al estilo de lo descrito en el Segundo Teorema del Bienestar?

Ejercicio B.5

(a) Halle el conjunto de Pareto de esta economía.

$$u^i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i(4 - x_2^i), \text{ con } i = \{1; 2\}.$$

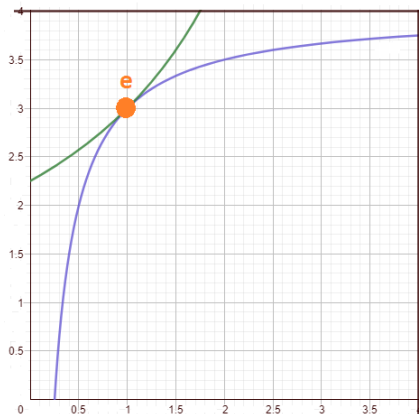


Figura 12: Curvas de indiferencia y dotación inicial

Ejercicio B.5

- Las curvas de indiferencia del consumidor 1 crecen hacia el sureste, donde posee mayores cantidades del bien 1 y menores del 2. Análogamente, las curvas de indiferencias del consumidor 2 crecen hacia el noroeste.
- La dotación inicial es un Óptimo de Pareto ya que no existe intercambio posible que mejore el bienestar de algunos de los consumidores sin empeorar al otro.

Ejercicio B.5

(a) Halle el conjunto de Pareto de esta economía.

Solución:

- Recordando que $TMS_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i}{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_j}$.

$$TMS_{12}^i(\mathbf{x}) = \frac{4 - x_2^i}{-x_1^i}$$

- Igualando $TMS_{12}^1 = TMS_{12}^2$

$$\frac{4 - x_2^1}{-x_1^1} = \frac{4 - x_2^2}{-x_1^2}$$

$$x_1^2 \times (4 - x_2^1) = x_1^1 \times (4 - x_2^2)$$

Ejercicio B.5

- Planteo la condición de factibilidad para el bien 1 y despejo x_1^2

$$x_1^1 + x_1^2 = e_1^1 + e_1^2$$

$$x_1^2 = 4 - x_1^1$$

- Planteo la condición de factibilidad para el bien 2 y despejo x_2^2

$$x_2^1 + x_2^2 = e_2^1 + e_2^2$$

$$x_2^2 = 4 - x_2^1$$

- Remplazo x_1^2 y x_2^2 en $TMS_{12}^1 = TMS_{12}^2$

$$x_1^2 \times (4 - x_2^1) = x_1^1 \times (4 - x_2^2)$$

$$(4 - x_1^1) \times (4 - x_2^1) = x_1^1 \times (4 - (4 - x_2^1))$$

$$16 - 4x_2^1 - 4x_1^1 + x_1^1 x_2^1 = x_1^1 x_2^1$$

$$x_2^1 = 4 - x_1^1$$

Ejercicio B.5

- Luego, las asignaciones Pareto-óptimas cumplen:

$$x_2^1 = 4 - x_1^1 \text{ con } 0 \leq x_1^1 \leq 4$$

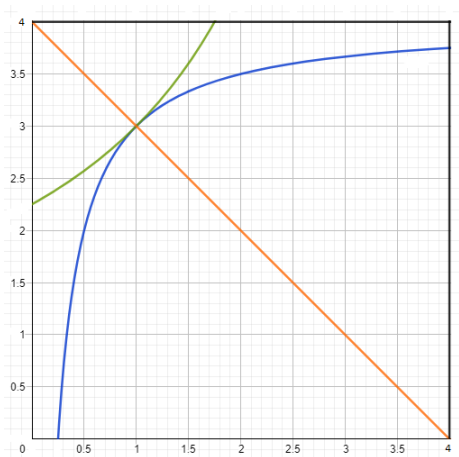


Figura 13: Curva de Contratos

Ejercicio B.5

(b) Obtenga todas las WEA de esta economía.

- Asumiendo solución interior, planteamos la relación de óptimo para un consumidor i , y despejamos x_1^i :

$$TMS_{12}^i = \frac{4 - x_2^i}{-x_1^i} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_1^i = \frac{p_2}{p_1}(x_2^i - 4)$$

- Reemplazando la expresión de x_1^i en la restricción presupuestaria:

$$p_1 x_1^i + p_2 x_2^i = p_1 e_1^i + p_2 e_2^i$$

$$p_1 \left[\frac{p_2}{p_1}(x_2^i - 4) \right] + p_2 x_2^i = p_1 e_1^i + p_2 e_2^i$$

$$p_2(2x_2^i - 4) = p_1 e_1^i + p_2 e_2^i$$

- Despejamos x_2^i y obtenemos las demandas en función de los precios y las dotaciones iniciales:

$$x_1^i = \frac{e_1^i}{2} + \frac{p_2}{p_1} \frac{e_2^i - 4}{2} \qquad x_2^i = \frac{p_1}{p_2} \frac{e_1^i}{2} + \frac{e_2^i + 4}{2}$$

Ejercicio B.5

- Reemplazando para las dotaciones de cada agente:

$$\mathbf{e}^1 = (1, 3) \quad x_1^1 = \frac{1 - p_2/p_1}{2} \quad x_2^1 = \frac{p_1/p_2 + 7}{2}$$

$$\mathbf{e}^2 = (3, 1) \quad x_1^2 = \frac{3 - 3p_2/p_1}{2} \quad x_2^2 = \frac{3p_1/p_2 + 5}{2}$$

- Planteando la condición de vaciado del mercado 2:

$$x_2^1 + x_2^2 = \frac{p_1/p_2 + 7}{2} + \frac{3p_1/p_2 + 5}{2} = 4$$

$$\frac{4p_1}{2p_2} + \frac{12}{2} = 4$$

$$\frac{2p_1}{p_2} = -2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = -1$$

- Se obtiene entonces que el equilibrio walrasiano es un vector de precios tal que $\frac{p_1}{p_2} = -1$. Tomando $p_1^* = 1$, resulta $p_2^* = -1$.
- Verificar que se obtiene la misma relación del vaciado del mercado 1.

Ejercicio B.5

- Luego, evaluando las demandas marshallianas para los precios de equilibrio ($p_1^* = 1$, $p_2^* = -1$), obtenemos las WEAs:

$$x_1^1 = 1 \quad x_2^1 = 3 \quad x_1^2 = 3 \quad x_2^2 = 1$$

Ejercicio B.5

- El bien 1 tiene un precio positivo ya que genera utilidad, mientras que el bien 2 genera desutilidad, por lo que tiene un precio negativo.
- Esto explica que la recta presupuestaria, a diferencia de lo que solemos ver, tiene pendiente positiva.
- Notar que este equilibrio escapa a la definición ($\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_{++}^n$) en sentido estricto.

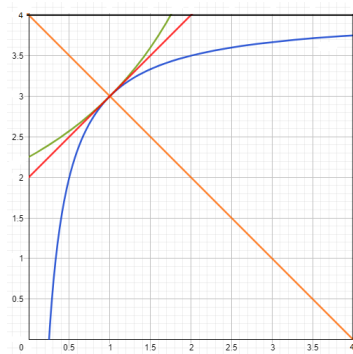


Figura 14: Recta Presupuestaria

Ejercicio B.5

(c) Suponga que las dotaciones iniciales se modifican a $\mathbf{e}^1 = (1; 0)$ y $\mathbf{e}^2 = (3; 4)$. Halle las WEA una vez más. Explique intuitivamente la diferencia entre su resultado y el obtenido en (b).

$$u^i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i(4 - x_2^i), \quad \text{con } i = \{1; 2\}.$$

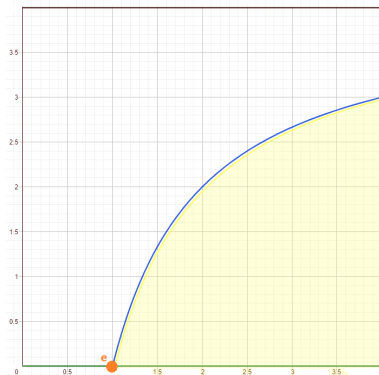


Figura 15: Curvas de indiferencia, dotación inicial y área lenticular.

Ejercicio B.5

(c) Suponga que las dotaciones iniciales se modifican a $\mathbf{e}^1 = (1; 0)$ y $\mathbf{e}^2 = (3; 4)$. Halle las WEA una vez más. Explique intuitivamente la diferencia entre su resultado y el obtenido en (b).

- Asumiendo solución interior, reemplazo las nuevas dotaciones iniciales en las expresiones para las demandas obtenidas en el inciso anterior:

$$\mathbf{e}^1 = (1, 0) \quad x_1^1 = \frac{1 - 4p_2/p_1}{2} \quad x_2^1 = \frac{p_1/p_2 + 4}{2}$$

$$\mathbf{e}^2 = (3, 4) \quad x_1^2 = \frac{3}{2} \quad x_2^2 = \frac{3p_1/p_2 + 8}{2}$$

- Evaluando para los precios de equilibrio ($p_1^* = 1$ $p_2^* = -1$) se obtienen las WEAs:

$$x_1^1 = \frac{5}{2} \quad x_2^1 = \frac{3}{2} \quad x_1^2 = \frac{3}{2} \quad x_2^2 = \frac{5}{2}$$

- La diferencia de este resultado con el alcanzado en el inciso (b) es que las dotaciones iniciales no son un equilibrio competitivo ni una asignación eficiente en el sentido de Pareto.

Ejercicio B.5

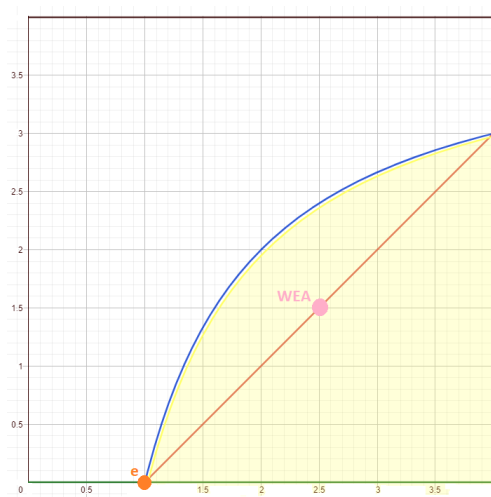


Figura 16: Recta Presupuestaria y WEA

Ejercicio B.5

(d) ¿En esta economía, es posible alcanzar todas las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto, al estilo de lo descrito en el Segundo Teorema del Bienestar?

- Si bien las condiciones del Segundo Teorema del Bienestar no se cumplen, ya que las funciones de utilidad no son fuertemente monótonas (no cumplen el Supuesto 5.1), se puede implementar que las asignaciones OP sean asignaciones de equilibrio walrasiano si se parte de las dotaciones iniciales correctas.

Ejercicio B.7

Consigna:

Considere una economía de intercambio puro de 2×2 . El conjunto de consumo está dado por $X^i = \mathbb{R}_+^2$, $i = \{1; 2\}$. Las preferencias de los agentes son representadas por:

$$\begin{aligned}u^1(x_1^1, x_2^1) &= -|x_1^1 + x_2^1 - 4|, \\u^2(x_1^2, x_2^2) &= x_1^2 + 2x_2^2,\end{aligned}$$

y las dotaciones iniciales están dadas por $\mathbf{e}^1 = (1; 1)$ y $\mathbf{e}^2 = (5; 1)$.

- (a) Describa el conjunto de Pareto de esta economía.
- (b) Halle todas las WEA.
- (c) ¿Puede aplicar el Primer Teorema del Bienestar? Si su respuesta es negativa, verifique si las asignaciones de equilibrios competitivo son eficientes en el sentido de Pareto.
- (d) ¿Puede aplicar el Segundo Teorema del Bienestar? Si su respuesta es negativa, verifique si las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto pueden alcanzarse mediante equilibrios competitivos con transferencias.

Ejercicio B.7

(a) *Describe el conjunto de Pareto de esta economía.*

- Sabemos que el hecho de que una asignación sea Pareto eficiente depende de las preferencias de los consumidores, es por esto que analizaremos este punto primero.
- El consumidor 2 tiene preferencias del tipo sustitutivos, $u^2(x_1^2, x_2^2) = x_1^2 + 2x_2^2$, por lo que sus curvas de indiferencias son de este tipo:

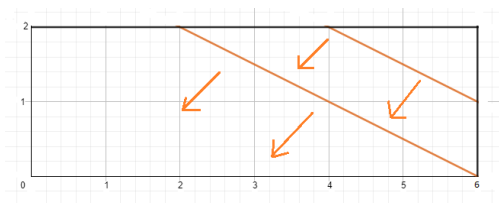


Figura 17: Curvas de Indiferencias del Consumidor 2.

- La pendiente de estas curvas de indiferencia es $-0,5$ ya que si renunciamos a una unidad del bien 2 debemos obtener 2 unidades del bien 1 para mantener el nivel de utilidad.

Ejercicio B.7

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = -|x_1^1 + x_2^1 - 4|$$

- ¿Existe un techo al nivel de utilidad del consumidor? En caso de que exista, ¿cuál es el máximo nivel de utilidad que puede alcanzar?

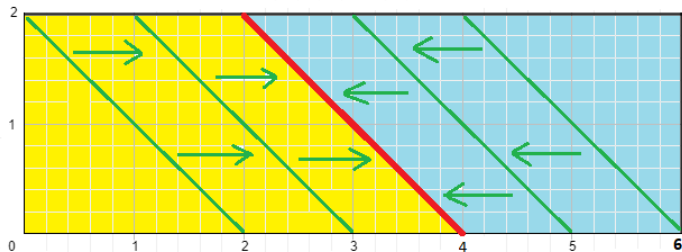


Figura 18: Curvas de Indiferencias del Consumidor 1.

- ¿Qué ocurre en área amarilla, como se comportan las curvas de indiferencia? ¿Y en el área azul? ¿Se cumple el axioma de monotonidad estricta? ¿Se cumple el axioma de No saciedad Local?

Ejercicio B.7

$$u^1(x_1^1, x_2^1) = -|x_1^1 + x_2^1 - 4|$$

- Otra particularidad de esta función de utilidad es que siempre que existen 2 curvas de indiferencia que generan un mismo nivel de utilidad:

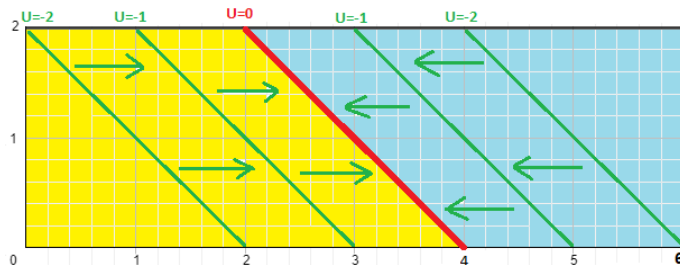


Figura 19: Curvas de Indiferencias del Consumidor 1.

Ejercicio B.7

- Toda el área amarilla no va a incluir asignaciones eficientes en el sentido de Pareto ya que en esa área las curvas de indiferencia de ambos consumidores crecen hacia el mismo lado, ambos se benefician desplazándose hacia el oeste de la caja. Analizar la asignación del extremo superior derecho.

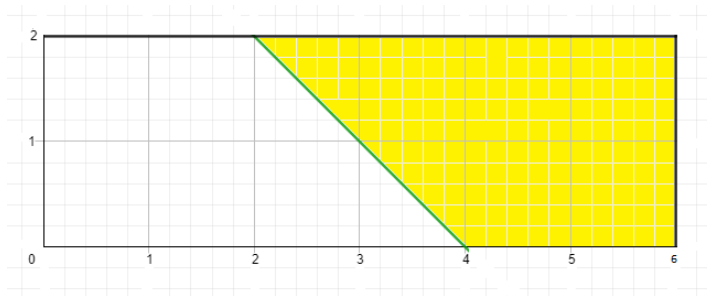


Figura 20: Asignaciones eficientes?

Ejercicio B.7

- Supongamos que nos hayamos sobre la asignación A . ¿Es A eficiente en el sentido de Pareto? ¿Qué ocurre con los niveles de utilidad de los consumidores si me desplazo a distintas zonas de la caja?
- No, A no es eficiente en el sentido de Pareto ya que puedo mejorar al consumidor 2, manteniendo la utilidad del consumidor 1, moviéndonos hacia la asignación B . El consumidor 1 permanece sobre su recta de saciedad y el consumidor 2 se encuentra sobre una curva de indiferencia mayor.

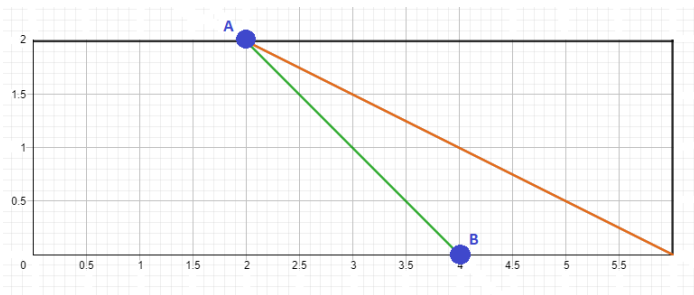


Figura 21: Asignaciones eficientes?

Ejercicio B.7

- Las asignaciones a la izquierda de la recta de saciedad (menos las que corresponden al borde inferior) generan un área de mutua mejora para ambos consumidores. Dibujar las curvas de indiferencia que pasan por el punto A.

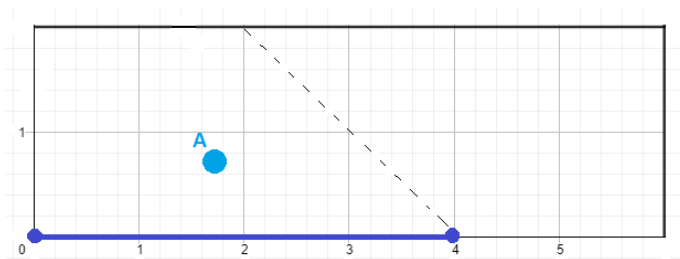


Figura 22: Asignaciones eficientes?

- Las asignaciones correspondientes al borde inferior a la izquierda de la recta de saciedad no generan áreas de mejora para ambos consumidores, por lo tanto, todas las que conforman la línea azul son eficientes en el sentido de Pareto.

Ejercicio B.7

(b) Halle todas las WEA.

Reminder: curvas oferta-precio

- Ante un cambio de precios relativos, la recta presupuestaria cambia de pendiente, pivotando sobre el punto de las dotaciones iniciales. Los agentes, para cada recta presupuestaria, elegirían alguna canasta óptima.
- Las curvas oferta-precio nos muestran, para cada agente, su canasta óptima ante distintos precios relativos.
- Si dentro de la caja las curvas de los agentes se superponen, en esos puntos las canastas son factibles y simultáneamente óptimas para cada uno de ellos dado el mismo vector de precios.
- Notar que de encontrar las asignaciones que cumplan con estas condiciones, habremos encontrado las WEAs de la economía, cada una asociada al vector de precios que es el equilibrio walrasiano.

Ejercicio B.7

(b) *Halle todas las WEA.*

- Vamos a buscar las asignaciones de equilibrio competitivo a través de la intersección de las curvas de oferta precio de ambos agentes (asumimos precios no negativos).
- Comenzamos buscando la curva de oferta precio para el consumidor 2, cuya función de utilidad es: $u^2(x_1^2, x_2^2) = x_1^2 + 2x_2^2$, la cual genera curvas de indiferencia con pendiente -0.5.
- Representaremos los distintos vectores de precios (recta presupuestaria) con una línea azul y la curva de indiferencia máxima que puede alcanzar el consumidor con una línea naranja.

Ejercicio B.7

- Asumamos el consumidor se enfrenta a un vector de precios donde $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$:

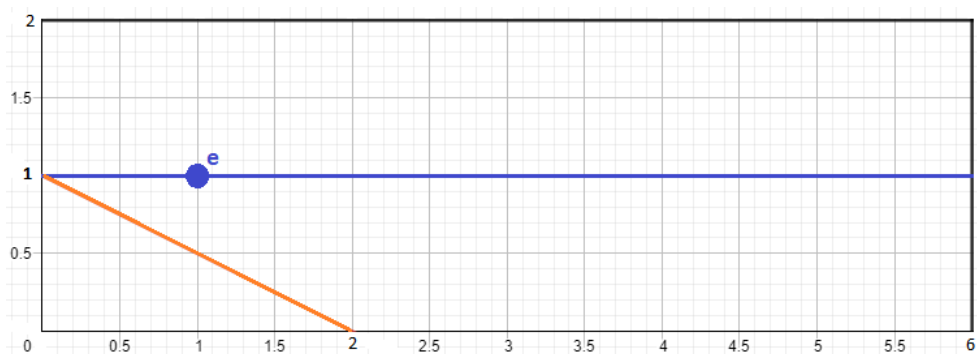


Figura 23: Recta presupuestaria y curva de indiferencia máxima alcanzable del consumidor 2.

Ejercicio B.7

- Asumamos el consumidor se enfrenta a un vector de precios donde $0 < \frac{p_1}{p_2} < 0,5$:

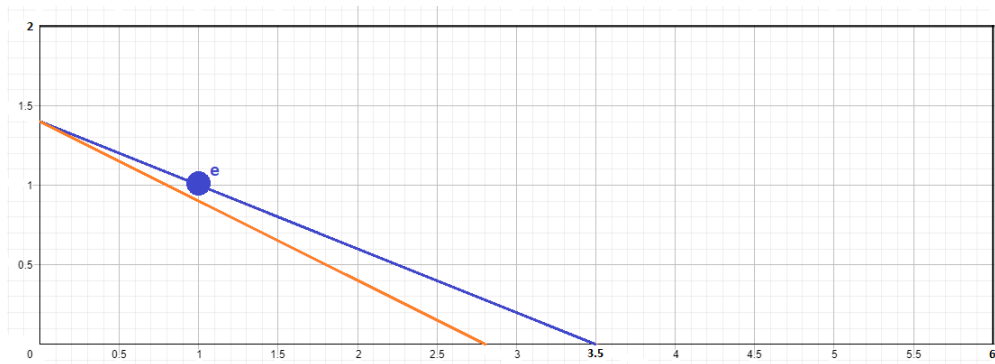


Figura 24: Recta presupuestaria y curva de indiferencia máxima alcanzable del consumidor 2.

Ejercicio B.7

- Asumamos el consumidor se enfrenta a un vector de precios donde $\frac{p_1}{p_2} > 0,5$:

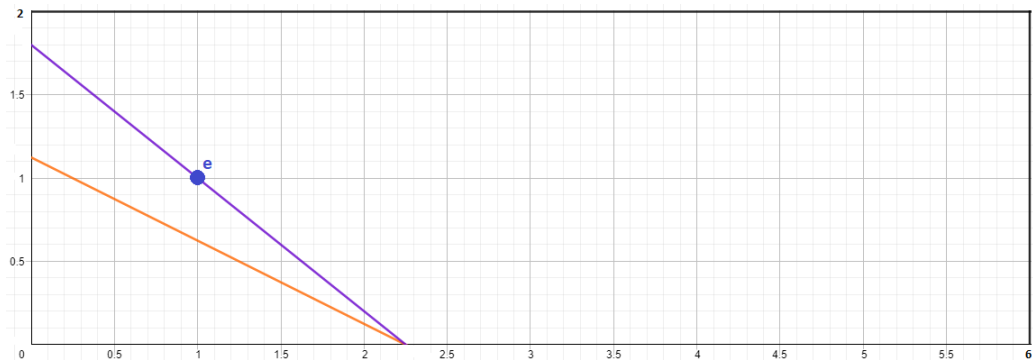


Figura 25: Recta presupuestaria y curva de indiferencia máxima alcanzable del consumidor 2.

Ejercicio B.7

- Asumamos el consumidor se enfrenta a un vector de precios donde $p_2 = 0$ y $p_1 > 0$:

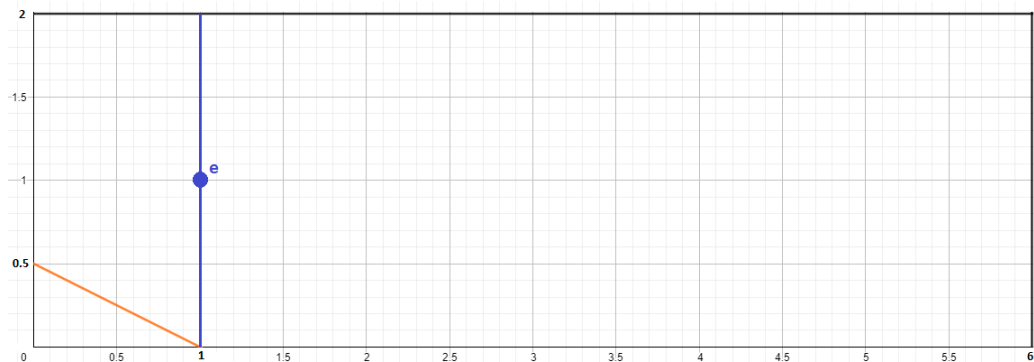


Figura 26: Recta presupuestaria y curva de indiferencia máxima alcanzable del consumidor 2.

Ejercicio B.7

- Como resultado, la curva de Oferta-Precio para el consumidor 2 es:

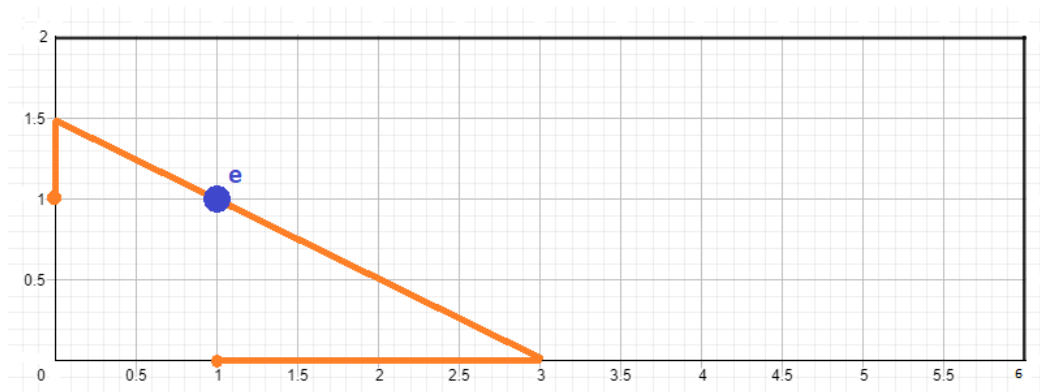


Figura 27: Curva de Oferta-Precio para el consumidor 2.

Ejercicio B.7

- Análogamente, buscamos la curva de oferta precio para el consumidor 1, cuya función de utilidad es: $u^1(x_1^1, x_2^1) = -|x_1^1 + x_2^1 - 4|$, la cual genera curvas de indiferencia con pendiente -1.
- Representaremos los distintos vectores de precios (recta presupuestaria) con una línea violeta, la curva de indiferencia máxima que puede alcanzar el consumidor con una línea verde y la recta de saciedad con una línea roja.

Ejercicio B.7

- Asumamos el consumidor se enfrenta a un vector de precios donde $p_1 = 0$ y $p_2 > 0$:

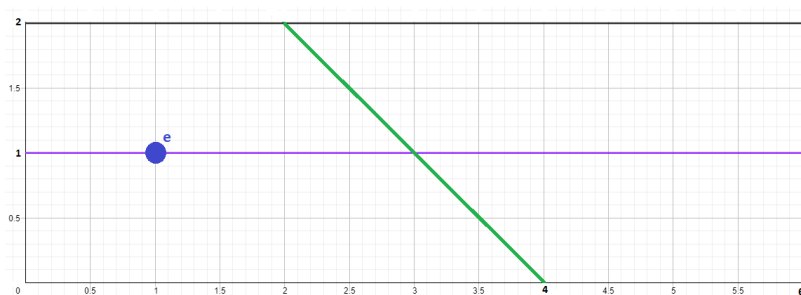


Figura 28: Recta presupuestaria, recta de saciedad y curva de indiferencia máxima alcanzable del consumidor 1.

- La curva de indiferencia máxima que alcanza el consumidor 1 con este vector de precios es la recta de saciedad, de hecho el consumidor estará indiferente sobre ubicarse en cualquier parte de la curva de indiferencia.

Ejercicio B.7

- Asumamos el consumidor se enfrenta a un vector de precios donde $0 < \frac{p_1}{p_2} < 1$:



Figura 29: Recta presupuestaria, recta de saciedad y curva de indiferencia máxima alcanzable del consumidor 1.

Ejercicio B.7

- Asumamos el consumidor se enfrenta a un vector de precios donde $\frac{p_1}{p_2} > 1$:

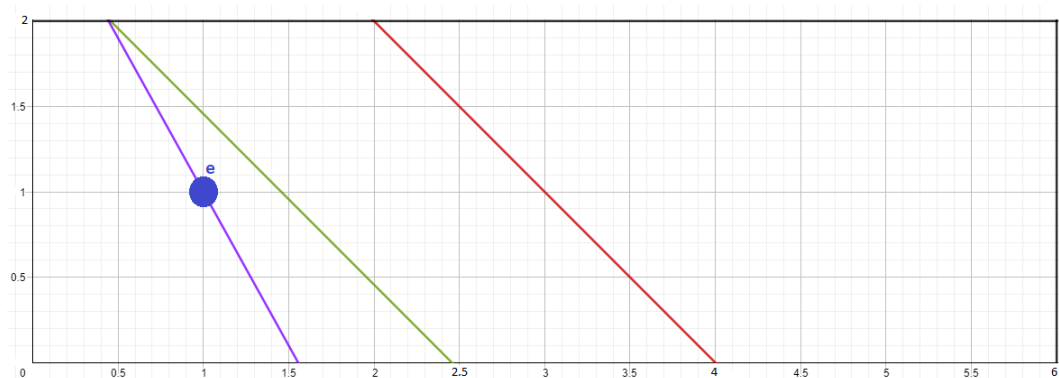


Figura 30: Recta presupuestaria, recta de saciedad y curva de indiferencia máxima alcanzable del consumidor 1.

Ejercicio B.7

- Asumamos el consumidor se enfrenta a un vector de precios donde $p_2 = 0$ y $p_1 > 0$:

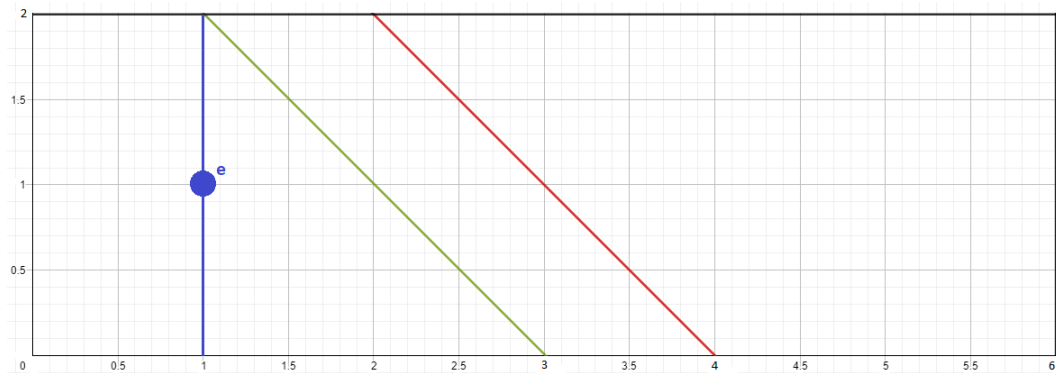


Figura 31: Recta presupuestaria y curva de indiferencia máxima alcanzable del consumidor 1.

Ejercicio B.7

- Como resultado, la curva de oferta-precio del consumidor 1 es:

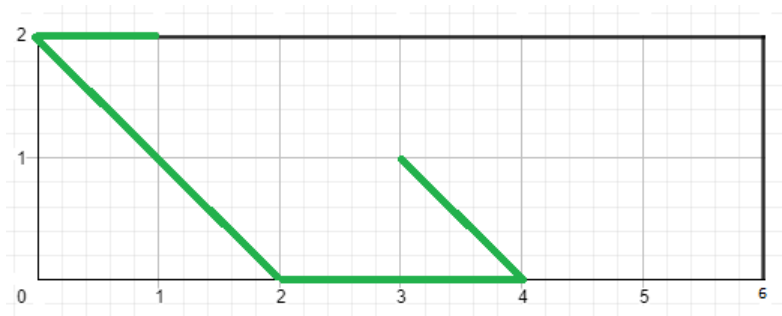


Figura 32: Curva de Oferta-Precio del consumidor 1.

Ejercicio B.7

- Sobreponemos ambas curvas Oferta-Precio para encontrar las WEAs:

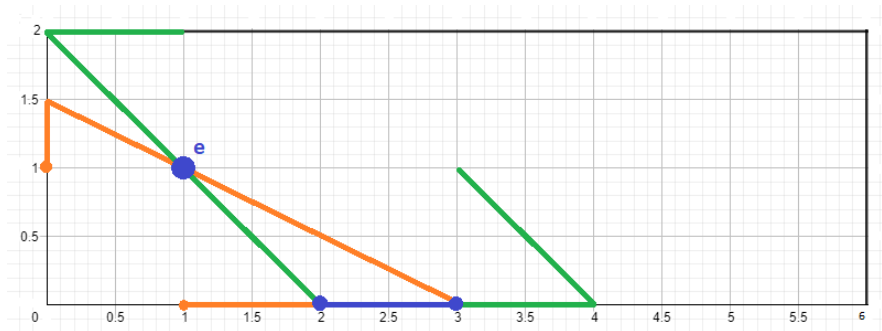


Figura 33: Asignaciones de Equilibrio Walrasiano.

- Las asignaciones azules son WEAs, y corresponden a distintos vectores de precios (equilibrios walrasianos) que oscilan entre:

$$0,5 \leq \frac{p_1}{p_2} \leq 1$$

Ejercicio B.7

(c) ¿Puede aplicar el Primer Teorema del Bienestar? Si su respuesta es negativa, verifique si las asignaciones de equilibrios competitivo son eficientes en el sentido de Pareto.

- Si bien las condiciones suficientes del Primer Teorema del Bienestar no se cumplen, ya que las preferencias de los consumidores no satisfacen con el axioma de monotonicidad estricta, se puede aplicar el Teorema, todos las asignaciones de equilibrio competitivo son OP.

Ejercicio B.7

(d) ¿Puede aplicar el Segundo Teorema del Bienestar? Si su respuesta es negativa, verifique si las asignaciones eficientes en el sentido de Pareto pueden alcanzarse mediante equilibrios competitivos con transferencias.

- Las condiciones suficientes del Segundo Teorema del Bienestar no se cumplen, ya que las funciones de utilidad no son fuertemente crecientes - por lo que no cumplen el Supuesto 5.1. Sin embargo, todas las asignaciones del conjunto de Pareto (inciso a) pueden ser sostenidas como WEAs para algún equilibrio walrasiano (vector de precios).