

Práctica I T: Incertidumbre

Microeconomía II - Curso: Paulo Pascuini

Santiago Rodríguez Vázquez, Gonzalo Di Felice¹

Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

Junio 2025

¹Una primera versión de estas slides fue facilitada por Lucía Sauer (UBA) y Paula Bonel (UBA).

Contenido de esta presentación:

1. Introducción

- Loterías
- Teoría de la Utilidad Esperada
- Función de Utilidad VNM

2. Axioma de Independencia

- Ejercicio 2.20 de J&R.

3. Perfiles al riesgo

- Disuadiendo el crimen, G. Becker (1968).
- Ejercicio 11.6. de SB

4. Seguro actuarialmente justo

- Ejercicios 6.C.1 y 6.C.1^B de MWG

5. Demanda de un activo riesgoso

- Influencia de los impuestos en el rendimiento.

Introducción

- Las decisiones que toman los individuos no surgen solo de los resultados esperados sino también de otros factores definidos a través de una función de utilidad.
- Eso se debe al hecho de que las ganancias pueden incrementarse, pero no necesariamente la valoración $u(g)$ del agente por la misma.
- Tomamos toda la estructura vista en Teoría del Consumidor y le añadimos **incertidumbre**.
- En Economía de la Información será un herramienta fundamental, que nos permitirá modelar los temas a tratar.
- Aplicación para la resolución modelos de equilibrio general dinámicos y estocásticos (*DSGE*).

Introducción

Teoría de la Utilidad Esperada:

Si las preferencias del decisor sobre las loterías satisfacen los axiomas:

G.1 *Complejitud*

G.2 *Transitividad*

G.3 *Continuidad*

G.4 *Monotonicidad*

G.5 *Sustitución*

G.6 *Reducción a Loterías Simples*

luego sus preferencias son representadas por una función de utilidad que tiene la forma de utilidad esperada:

$$u(g) = \sum_{i=1}^n p_i * u(a_i)$$

Loterías

- Lotería Simple

$$g_s = \{(p_1 \circ a_1, p_2 \circ a_2, \dots, p_n \circ a_n) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$

Ejemplo:

$$g^1 = (1/3 \circ \$9100, 1/3 \circ \$6400, 1/3 \circ \$1000)$$

$$g^2 = (1 \circ \$1000)$$

- Lotería Compuesta

$$g_c = \{(p_1 \circ g^1, p_2 \circ g^2, \dots, p_n \circ g^n) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$

Ejemplo:

$$g = (2/3 \circ g^1, 1/3 \circ g^2)$$

$$g = (2/3 \circ (1/3 \circ \$9100, 1/3 \circ \$6400, 1/3 \circ \$1000), 1/3 \circ (1 \circ \$1000))$$

Repaso: Axiomas G.5 y G.6

G.5 Sustitución

Sean dos loterías compuestas: g y h , donde $g^i \sim h^i$, es decir, el individuo está indiferente entre las loterías (simples o compuestas) que componen a g y h , luego $g \sim h$ si $p_g^i = p_h^i \forall i$.

G.6 Reducción a Loterías Simples

Esto se puede ver fácilmente con el ejemplo de la slide anterior:

$$g = (2/3 \circ g^1, 1/3 \circ g^2)$$

$$g = (2/3 \circ (1/3 \circ \$9100, 1/3 \circ \$6400, 1/3 \circ \$1000), 1/3 \circ (1 \circ \$1000))$$

distribuyendo la probabilidad de ocurrencia de g^1 y g^2 , que conforman a g

$$g_s = (2/9 \circ \$9100, 2/9 \circ \$6400, 5/9 \circ \$1000)$$

es así como una lotería compuesta puede ser reducida a una simple y se puede ver como en última instancia las preferencias del individuo están completamente determinadas sobre estas últimas. $\rightarrow g \sim g_s$

Axioma Independencia

Ejercicio 2.20 J.&R.

Considere el siguiente Axioma de Independencia en las $\succsim$ sobre las loterías:

Si

$$(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n) \sim (q_1 \circ a_1, \dots, q_n \circ a_n)$$

luego para todo $\alpha \in [0, 1]$, y para toda lotería $(r_1 \circ a_1, \dots, r_n \circ a_n)$,

$$((\alpha p_1 + (1 - \alpha)r_1) \circ a_1, \dots, (\alpha p_n + (1 - \alpha)r_n) \circ a_n)$$

$\sim$

$$((\alpha q_1 + (1 - \alpha)r_1) \circ a_1, \dots, (\alpha q_n + (1 - \alpha)r_n) \circ a_n)$$

- Mostrar que este axioma se deduce del Axioma G5 y G6.

Antes de comenzar veamos intuitivamente que implica este Axioma:

- Supongamos dos loterías g_1 y g_2 , donde $g_1 \succsim g_2$
- Luego, tomando cualquier promedio ponderado (o mezcla t) de g_2 con g_3 y g_1 con g_3 .
- La relación inicial de preferencias no debería variar.

$$g_1 \succsim g_2$$

Sea $t = 1/2$, el Axioma de Independencia indica:

$$(1/2 \circ g_1, 1/2 \circ g_3) \succsim (1/2 \circ g_2, 1/2 \circ g_3)$$

- Es decir, el ranking entre g_1 y g_2 es **independiente** de cualquier tercer lotería g_3 cuando esta lotería se promedia con g_1 y g_2 **de la misma manera** ($t = 1/2$ en ambos casos).
- En otras palabras, lo que quiere mostrar es que cualquier combinación convexa entre loterías no afecta las preferencias sobre ellas.

Proof. Axioma Independencia

Partimos de:

$$((\alpha p_1 + (1 - \alpha)r_1) \circ a_1, \dots, (\alpha p_n + (1 - \alpha)r_n) \circ a_n)$$

$\sim$

$$((\alpha q_1 + (1 - \alpha)r_1) \circ a_1, \dots, (\alpha q_n + (1 - \alpha)r_n) \circ a_n) \quad (*)$$

Llamemos:

$$x = (p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n)$$

$$y = (q_1 \circ a_1, \dots, q_n \circ a_n)$$

$$z = (r_1 \circ a_1, \dots, r_n \circ a_n)$$

Tomando la primera parte de la expresión $(*)$

$$((\alpha p_1 + (1 - \alpha)r_1) \circ a_1, \dots, (\alpha p_n + (1 - \alpha)r_n) \circ a_n)$$

podemos reescribirla de la siguiente forma aplicando G.6,

$$(\alpha \circ (p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n), (1 - \alpha) \circ (r_1 \circ a_1, \dots, r_n \circ a_n))$$

$$(\alpha \circ x, (1 - \alpha) \circ z) \quad (**)$$

Cont. proof

Aplicando el mismo procedimiento entre y y z (segunda parte de la expresión $(*)$), llegamos:

$$((\alpha q_1 + (1 - \alpha)r_1) \circ a_1, \dots, (\alpha q_n + (1 - \alpha)r_n) \circ a_n) \\ (\alpha \circ y, (1 - \alpha) \circ z) \quad (***)$$

Entonces a partir de $(*)$, y tomando las expresiones anteriormente halladas $(**)$ y $(***)$, se obtiene la siguiente relación:

$$(\alpha \circ x, (1 - \alpha) \circ z) \sim (\alpha \circ y, (1 - \alpha) \circ z)$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Por G.5, sabemos que eso se cumple si:

$$x \sim y$$

- El axioma de independencia nos indica que la relación de preferencia entre loterías no se altera cuando se “combinan” en igual probabilidad con otra.
- El axioma de independencia está íntimamente relacionado con la representatividad de las preferencias sobre las loterías por una función de utilidad que tiene la forma de *utilidad esperada*.

Actitudes frente al riesgo

1. Averso al riesgo en g si $u[E(g)] > u(g) \implies u''(.) < 0$
2. Neutral al riesgo en g si $u[E(g)] = u(g) \implies u''(.) = 0$
3. Amante del riesgo en g si $u[E(g)] < u(g) \implies u''(.) > 0$

Si tales actitudes se cumplen para todas las loterías, decimos que el individuo es averso, neutral o amante al riesgo, respectivamente

Otra forma de medir el perfil al riesgo es por medio del coeficiente Arrow-Pratt:

$$R_a(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)}$$

- **DARA**: la aversión al riesgo de un individuo es menor cuanto mayor sea su riqueza, y por tanto, el coeficiente de aversión absoluta al riesgo es decreciente con la riqueza. $\rightarrow \partial R_a(w)/\partial w < 0$.
- **CARA**: la aversión al riesgo de un individuo es constante, si $R_a(w)$ permanece constante con un aumento en w . $\rightarrow \partial R_a(w)/\partial w = 0$.
- **IARA**: la aversión al riesgo de un individuo es creciente, si $R_a(w)$ aumenta con un aumento en w . $\rightarrow \partial R_a(w)/\partial w > 0$.

Ejemplo:

- **DARA:** supongamos la función de utilidad VNM $u(w) = \ln(w)$, donde $u' = 1/w$ y $u'' = -1/w^2$

$$R_a(w) = -\frac{(-1)/w^2}{1/w} = 1/w$$

$$\frac{\partial R_a(w)}{\partial w} = -1/w^2 < 0$$

- **IARA:** supongamos la función de utilidad VNM $u(w) = w - bw^2$, donde $u' = 1 - 2bw$ y $u'' = -2b$ y $b > 0$

$$R_a(w) = -\left(\frac{-2b}{1 - 2bw}\right)$$

Como esperamos un agente averso al riesgo ($R_a(w) > 0$), imponemos $1 - 2bW > 0$. Luego:

$$\frac{\partial R_a(w)}{\partial w} = \frac{4b^2}{(1 - 2bw)^2} > 0$$

Disuadiendo el Crimen

Ejercicio 11.6. de SB: Félix puede seguir una vida delictiva. Su probabilidad, p , de ser atrapado es 0,4. Si lo atrapan, su riqueza en la cárcel es de \$25; si no lo atrapan, él disfruta de una riqueza de \$100.

- (a) ¿Cuál es la riqueza esperada de Félix?
- (b) Suponga que la utilidad vNM de la riqueza de Félix está dada por $\sqrt{w}$. ¿Cuál es la utilidad esperada de Félix al llevar una vida delictiva?
- (c) ¿Cuál es el nivel de riqueza cierta que dejaría indiferente a Félix entre vivir honestamente o elegir una vida delictiva?
- (d) Suponga que el sistema judicial quiere disuadir el crimen aumentando las penas por una vida delictiva, por lo que la riqueza de Félix en la cárcel es ahora \$16. ¿Hasta qué punto la sociedad puede reducir la aplicación de la ley, es decir, la probabilidad de ser atrapado, p , tal que la utilidad esperada de Félix sea la misma que en (b)?

Disuadiendo el Crimen

- (a) ¿Qué valor tiene la riqueza esperada de Félix?

La lotería de llevar una vida delictiva queda conformada:

$$g = (0, 4 \circ 25, 0, 6 \circ 100)$$

Luego, la riqueza esperada $E[g]$ o el valor medio de su riqueza:

$$25 * 0,4 + 100 * 0,6 = 70$$

- (b) Suponga que Félix tiene la siguiente función de utilidad $VNM \sqrt{w}$ ¿Cuál es la utilidad esperada?

$$u(g) = 0,4\sqrt{25} + 0,6\sqrt{100} = 8$$

Notar que $\sqrt{w}$ es una función estrictamente cóncava en todo su dominio y, por lo tanto, Félix es averso al riesgo.

$$8 = u(g) \neq u[E(g)] = \sqrt{70} = 8,36$$

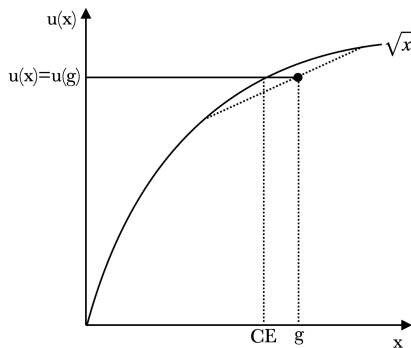
(c) ¿Cuál es el nivel de riqueza que deja a Félix indiferente entre vivir honestamente o elegir una vida delictiva?

- El **equivalente cierto** (CE) es aquella cantidad de riqueza donde:

$$u(g) = u(CE)$$

es decir, ambas opciones le reportan la misma utilidad:

$$\sqrt{CE} = 8 \implies CE = 64$$



(d) Suponga que el sistema judicial quiere disuadir la actividad delictiva, incrementando las sanciones, entonces la riqueza de Félix en prisión ahora pasa a ser \$16. ¿En qué medida puede la sociedad reducir la aplicación de la ley, es decir, la probabilidad de ser atrapado, p , de modo que la utilidad esperada de Félix sea la misma que en (b)?

Planteamos la nueva lotería:

$$g' = (p \circ 16, (1 - p) \circ 100)$$

Debemos hallar cuál es p tal que $u(g') = 8$.

$$p * u(16) + (1 - p) * u(100) = 8$$

$$p * 4 + (1 - p) * 10 = 8$$

$$p = \frac{1}{3}$$

Resumen: En estas aplicaciones, se encuentra que políticas con mayores penalizaciones combinadas con menores probabilidades de captación de infractores son igual de efectivas y suelen ser menos costosas.

¿Qué analizamos en este ejercicio?: Este tipo de aplicaciones a problemas usualmente no tratados en economía está basado en trabajos de Gary Becker (Por ejemplo: “*Crime and Punishment*” (1974)).

¿Qué puede hacer el Estado para que los individuos eviten cometer la infracción?

- Aumentar el control $\rightarrow$ afectando p .
- Aumentar la penalización una vez que detectó la falta/delito (ej: multas o duración de las penas).
- Las alternativas tienen distintos costos.

Seguro actuarialmente justo

Ejercicio 6.C.1 de MWG.

- Considere un agente estrictamente averso al riesgo.
- Tiene una riqueza w pero corre el riesgo de perder L dólares.
- La probabilidad de pérdida es π .
- Sin embargo, es posible que el agente compre un seguro.
- Una unidad de seguro cuesta ρ dólares y paga 1 si ocurre la pérdida.
- Si α unidades de seguro son compradas y no ocurre la pérdida, la riqueza del individuo será $w - \alpha\rho$, y si ocurre será $w - \alpha\rho - L + \alpha$.

La decisión del agente será determinar la cantidad óptima α de seguro a comprar. Para ello, el agente tendrá que resolver la maximización de su utilidad esperada:

$$\max_{\alpha \geq 0} (1 - \pi)u(w - \alpha\rho) + \pi u(w - \alpha\rho - L + \alpha)$$

Si α^* es óptimo tendrá que cumplirse la CPO:

$$-\rho(1 - \pi)u'(w - \alpha^*\rho) + \pi(1 - \rho)u'(w - L + \alpha^*(1 - \rho)) \leq 0$$

con igualdad si $\alpha^* > 0$.

Ahora supongamos que el precio de ρ unidades de seguro es *actuarialmente justo*, es decir, $\rho = \pi$. Luego, la CPO nos queda:

$$u'(w - L + \alpha^*(1 - \pi)) - u'(w - \alpha^*\pi) \leq 0$$

con igualdad si $\alpha^* > 0$.

Dado que $u'(w - L) > u'(w)$, debe ser cierto que $\alpha^* > 0$, y entonces

$$u'(w - L + \alpha^*(1 - \pi)) = u'(w - \alpha^*\pi)$$

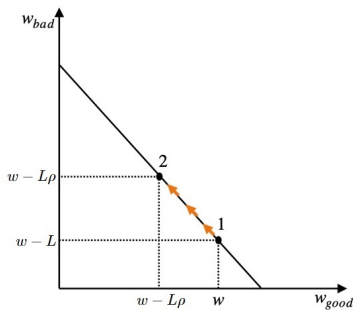
Como $u'(\cdot)$ es estrictamente decreciente, esto implica que,

$$w - L + \alpha^*(1 - \pi) = w - \alpha^*\pi$$

lo que nos da que,

$$\alpha^* = L$$

- Esto muestra, que un agente estrictamente averso al riesgo al contratar un seguro actuarialmente justo no solo escoge una cantidad $\alpha^* > 0$, sino que se asegurará por una cantidad igual al monto de la pérdida.
- La riqueza final será $\pi - L\rho$, independientemente de si ocurre la pérdida.



- La figura muestra la forma en que el individuo distribuye el riesgo al contratar un seguro actuarialmente justo, quedando indiferente entre el escenario b y g .

Ejercicio 6.C.1^B de MWG.

- Ahora bien, analicemos el caso donde $\rho > \pi$ y mostremos que el individuo no se asegura completamente.

Ya vimos que si $\rho = \pi \implies \alpha^* = L$. Recordando la CPO:

$$-\rho(1 - \pi)u'(w - \alpha^*\rho) + \pi(1 - \rho)u'(w - L + \alpha^*(1 - \rho)) \leq 0$$

que se cumple con igualdad si $\alpha > 0$. Si asumimos que también en este caso se asegura por la totalidad del potencial siniestro ($\alpha = L$):

$$-\rho(1 - \pi)u'(w - L\rho) + \pi(1 - \rho)u'(w - L + L(1 - \rho))$$

$$-\rho(1 - \pi)u'(w - L\rho) + \pi(1 - \rho)u'(w - L\rho))$$

$$u'(w - L\rho)(-\rho(1 - \pi) + \pi(1 - \rho))$$

$$u'(w - L\rho)(\pi - \rho) < 0$$

dado que $\rho > \pi$. Entonces la CPO no se cumple cuando $\alpha = L$.

- Luego, el individuo no se asegura por completo porque el seguro es caro.

Demanda de un activo riesgoso

- Supongamos que el consumidor tiene la riqueza w y está considerando la posibilidad de invertir una cantidad x en un activo incierto.
- Este activo podría generar un rendimiento $r_b \in (0; 1]$ (aumenta el valor del activo), o $r_m \in [-1; 0)$ (disminuye el valor del activo).
- La probabilidad de que le vaya bien es π .
- Mostrar que si el agente es averso y el rendimiento esperado del activo es negativo, no invierte en el activo.

La riqueza que tendrá el consumidor en ambos estados de naturaleza:

$$w_b = (w - x) + x(1 + r_b) = w + xr_b$$

$$w_m = (w - x) + x(1 + r_m) = w + xr_m$$

Si el consumidor debe decidir cuánto invertir en x debe resolver:

$$\max_{x \geq 0} u^e(x) = \pi u(w + xr_b) + (1 - \pi)u(w + xr_m)$$

Planteando la CPO, asumiendo que $u'' < 0$ y evaluando la expresión en $x = 0$:

$$u'(x) = \pi u'(w + xr_b)r_b + (1 - \pi)u'(w + xr_m)r_m$$

$$u'(0) = \underbrace{u'(w)}_{(+)} \underbrace{[\pi r_b + (1 - \pi)r_m]}_{(-)}$$

La expresión que se encuentra entre corchetes es el rendimiento esperado de x .

- Si el rendimiento esperado es negativo, la u^e debe disminuir cuando se invierte el primer peso en el activo.
- Como $u'' < 0$ la utilidad continuará disminuyendo conforme se inviertan más pesos en x .
- Entonces, si el valor esperado de una lotería es negativo, una persona aversa al riesgo nunca estaría dispuesta a ejecutar el trade. $\implies$ La máxima utilidad esperada será en $x^* = 0$.
- Sin embargo, si el rendimiento esperado de un activo es $+$, el aumento de x incrementará la u^e , por lo que siempre querrá invertir independientemente del perfil al riesgo que se tenga.

Influencia de los impuestos en el rendimiento

- Ahora, supongamos que sobre el mismo activo incierto el Estado aplica un impuesto t sobre los rendimientos.
- La riqueza quedará determinada de la siguiente manera:

$$w_b = w + r_b x(1 - t)$$

$$w_m = w + r_m x(1 - t)$$

- La pregunta aquí será: ¿cómo se comporta el nivel de inversión en x cuando se grava su rendimiento?

En primer lugar, la CPO que determina la inversión óptima en x , será

$$\pi u'(w + x r_b(1 - t)) r_b(1 - t) + (1 - \pi) u'(w + x r_m(1 - t)) r_m(1 - t) = 0$$

simplificando los términos $(1 - t)$, tenemos que

$$\pi u'(w + x r_b(1 - t)) r_b + (1 - \pi) u'(w + x r_m(1 - t)) r_m = 0$$

Ahora, llamemos $\hat{x}$ a la solución con el impuesto y x^* a la solución sin impuesto ($t = 0$).

¿Qué relación hay entre $\hat{x}$ y x^* ?

- con $0 < t < 1$ $\pi u'(w + r_b \hat{x}(1 - t)) + (1 - \pi) u'(w + r_m \hat{x}(1 - t)) = 0$
- con $t = 0$ $\pi u'(w + r_b x^*(1 - 0)) + (1 - \pi) u'(w + r_m x^*(1 - 0)) = 0$

De las últimas dos CPO se puede ver que:

$$x^* = \hat{x}(1 - t)$$

y si reacomodamos, la relación entre x^* y $\hat{x}$ se hace explícita:

$$\frac{x^*}{1 - t} = \hat{x}$$

- De esta forma podemos ver que $\hat{x} > x^*$, dado que $0 < t < 1$ y por tanto $1/(1-t) > 1$.
- Resultado que es contraintuitivo, ya que a primera vista hubiésemos afirmado que un impuesto de esta índole tendería a disuadir a los individuos de invertir en él.
- Lo cierto es que, un impuesto a los rendimientos del activo incierto fomentan la inversión en él.
- Este hecho se debe a que:
 - si bien reduce las ganancias cuando $x \uparrow$, porque $r_b(1-t) < r_b$
 - también logra reducir la pérdida en el estado de naturaleza malo $x \downarrow$, porque $r_m(1-t) > r_m$
- En otras palabras, el impuesto reduce el rendimiento esperado, pero también su riesgo (σ).
- Así, si el individuo aumenta su inversión puede obtener exactamente el mismo tipo de rendimiento que antes, y de esa forma contrarrestar totalmente el efecto de t .